Tome 20 N° 8-9 Aout-Septembre 1959

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM

RÉSONANCE MAGNÉTIQUE DE NIVEAUX ATOMIQUES EXCITÉS PAR BOMBARDEMENT ÉLECTRONIQUE

DEUXIÈME PARTIE

Par J. C. PÉBAY-PEYROULA,
Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure.

Résumé. — Dans un article précédent, nous avons décrit les expériences permettant de mettre en évidence la résonance magnétique des niveaux 6 $^3F_4$, 5d^9 6s^2 6p et d'un niveau $^3P_2$ de l'atome de mercure excité par bombardement électronique.

Nous montrons que l'étude de la largeur des raies des isotopes pairs conduit à la durée de vie du niveau. Nous avons déterminé d'autre part les facteurs de Landé. Dans le cas des isotopes impairs ^{199}Hg et ^{201}Hg, nous avons étudié l'effet Back-Goudsmit et déduit un ordre de grandeur des structures hyperfines du niveau 6 $^3F_4$.

Des résonances magnétiques ont été décelées par la même technique sur l'atome de sodium.

Abstract. — In a previous paper experiments have been described in which magnetic resonances of levels 6 $^3F_4$, 5d^9 6s^2 6p $^1D_2$ and $^3P_2$ of mercury were produced. Electron bombardment was used for exciting the levels.

It is shown that measurements of the width of the even isotope lines lead to the value of the lifetime of the level. Landé factors have also been determined.

In the case of the odd isotopes ^{199}Hg and ^{201}Hg, the Back-Goudsmit effect of the 6 $^3F_4$ level has been studied. An approximate value of the hfs intervals of this level has been obtained.

The same technique has given positive results on some levels of the Na atom.

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX ET INTERPRÉTATION

Expériences sur le mercure. — Les différentes expériences ont été faites sur des tubes électroniques remplis avec l'un des mélanges d'isotopes suivants :

	I (MERCURE NATUREL)	II	III
	—	—	—
Isotopes pairs	69,8 %	24,65 %	11 %
199	17,0 %	73,10 %	0,8 %
201	13,2 %	2,35 %	88,2 %

I. Isotopes pairs. — *Étude de la forme de raie.* — L'étude de la forme d'une raie de résonance magnétique a été étudiée en détail par Brossel et Bitter dans le cas du niveau 6 $^3P_1$ du mercure [1], [2], [3]. Nous allons généraliser cette étude au cas d'un niveau quelconque.

Supposons que, dans un régime stationnaire d'excitation, le nombre d'atomes dans le sous-niveau Zeeman $m = p$ soit N_p, nous pouvons facilement calculer la grandeur $I_\pi - I_\sigma$, grandeur qui nous est accessible grâce au montage en pont des photomultiplicateurs. On a :

$$I_\pi - I_\sigma = \sum_{p=m}^{p=-m} N_p C_p \qquad (1)$$

les C_p sont les différents coefficients numériques calculables à partir des probabilités de transition.

Envisageons une excitation par chocs électroniques ne durant que le temps dt à l'instant 0, n_p atomes sont portés par seconde dans l'état excité $m = p$. Au bout du temps t, par émission spontanée, le nombre d'atomes sera réduit à n_p e$^{-t/\tau}$ dt, puisque la durée de vie τ est la même pour tous les sous-niveaux Zeeman.

Si, dans ces conditions, nous établissons un champ de radiofréquence pendant le temps t, des atomes seront transférés des états $m = p$ aux états $m = q$ avec une probabilité $P(F, p, q, t)$ définie par aillleurs (*). La variation de population du niveau $m = p$ sera :

$$\mathrm{d}n_p = \left[\sum_{q=-m}^{q=+m} P(F, p, q, t).n_q - \sum_{q=-m}^{q=+m} P(F, q, p, t)\, n_p\right] \mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t,$$

(*) L'expression de Majorana, $P(F, p, q, t)$, est donnée en particulier dans [2] et [3].

soit, comme $P(F, p, q, t) = P(F, q, p, t)$:

$$dn_p = \sum_q P(F, p, q, t)\,(n_q - n_p)\,e^{-t/\tau}\,dt.$$

Si l'excitation électronique se produit pendant longtemps, la variation de population du niveau $m = p$ sera :

$$\Delta n_p = \sum_q \int_0^\infty P(F, p, q, t)\,(n_q - n_p)\,e^{-t/\tau}\,dt.$$

D'après (I), le signal, lors de la résonance magnétique, est :

$$s = \Delta(I_\pi - I_\sigma) = \sum_p \Delta n_p\, C_p$$

soit

$$s = \sum_{p=-m}^{p=+m} \sum_{q=-m}^{q=+m} \int_0^\infty P(F, p, q, t)\,(n_q - n_p)\,C_p\,e^{-t/\tau}\,dt$$

la vitesse d'excitation se déduit du nombre N_p d'atomes dans un régime stationnaire par

$$n_p = \frac{N_p}{\tau}$$

Dans le cas des isotopes pairs, $F = J$, et est égal à un nombre entier. Les expressions des probabilités de transition sont de la forme :

$$P(F, p, q, t) = \sum_{n=1}^{n=2F} a_n^{pq} \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{4F-2n}$$

en posant

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = P(1/2, 1/2, -1/2, t)$$

$P(1/2, 1/2, -1/2, t)$

$$= \frac{(\gamma H_1)^2}{(\gamma H_1)^2 + (\omega - \omega_0)^2} \sin^2 \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma H_1)^2 + (\omega - \omega_0)^2}\,.t$$

Les coefficients a_n^{pq} sont calculés à partir de la formule de Majorana.

Nous pouvons écrire le signal de résonance

$$s = \frac{1}{\tau}\sum^{pq.n} \int_0^\infty a_n^{pq} \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{4F-2n} (N_q - N_t)\,C_p\,e^{-t/\tau}\,dt$$

et après sommation :

$$s = \frac{1}{\tau}\sum_n K_n \int_0^\infty \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} e^{-t/\tau}\,dt. \qquad \text{(II)}$$

L'évaluation des intégrales $\int_0^\infty \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} e^{-t/\tau}\,dt$ est simple, et peut se faire par récurrence ; par contre l'évaluation des coefficients K_n est fastidieuse et demande la connaissance des populations N_p créées par bombardement électronique. Ces données étant pratiquement inaccessibles aussi bien par le calcul que par l'expérience l'étude précise de la forme de raies est impossible. Quelques conclusions, cependant, peuvent en être tirées.

Aux faibles niveaux de radiofréquence, le terme en $\sin^2 \alpha$ est le seul important, les autres étant d'un ordre supérieur en γH_1^2, on a donc :

$$s \# \frac{A}{\tau}\int_0^\infty \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 e^{-t/\tau}\,dt$$
$$= \frac{1}{2} A \frac{(\gamma H_1)^2}{(\gamma H_1)^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2}.$$

Cette raie est une raie de Lorentz, et sa largeur à mi-hauteur pour un champ de radiofréquence nul, est :

$$\Delta\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2}{\tau}.$$

Pour une amplitude H_1 plus grande, les termes en $\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^4$ et les termes supérieurs deviennent non négligeables, et la raie prend une forme complexe. A partir d'une certaine valeur du champ oscillant, elle présente un renversement, et l'aspect de la courbe est analogue à celui des courbes de résonance du niveau 6 $^3P_1$.

En fonction du niveau de radiofréquence, nous pouvons écrire la demi-largeur sous forme du développement limité :

$$\Delta\omega^2 = \Delta\omega_0^2 + a(\gamma H_1)^2 + b\,\ldots$$

Dans le cas du niveau 6 $^3P_1$, Brossel a montré que les coefficients b ... sont négligeables, et il a calculé la valeur de a. L'ignorance de la valeur des N_p ne nous permet pas de préciser ce point. Seule l'expérience nous montre, qu'*en portant le carré de la demi-largeur en fonction du carré du champ oscillant, les points sont généralement parfaitement alignés.* La détermination de $\Delta\omega_0$ et, par suite, de la durée de vie τ, est ainsi très commode.

Lorsque l'on change la grandeur du champ magnétique oscillant, il se produit une modification de l'intensité lumineuse par suite de la variation de la vitesse des électrons et du débit électronique. L'étude de l'amplitude à résonance n'est donc pas possible expérimentalement.

Résultats expérimentaux. — Les trois niveaux identifiés dans le cas du mercure ont été étudiés systématiquement, afin de déterminer les facteurs de Landé et les durées de vie. De nombreuses mesures ont été faites à des fréquences différentes et nous avons été conduits, pour éviter le risque d'erreurs systématiques, à étudier l'influence de la *structure fine* :

Dans le cas du niveau 6 $^3F_4$, le champ de 80 gauss nécessaire pour détecter la résonance à 140 Mc/s environ, produit un découplage LS. Les courbes représentant les différents états magnétiques du niveau 6 ^3F ne pourront plus être confondues avec leurs tangentes à l'origine. On aura donc :

$$\omega = g\,\mu_B H_0 + aH_0^2 + bH_0^3 + \ldots \qquad \text{(III)}$$

les coefficients a et b dépendant de la transition

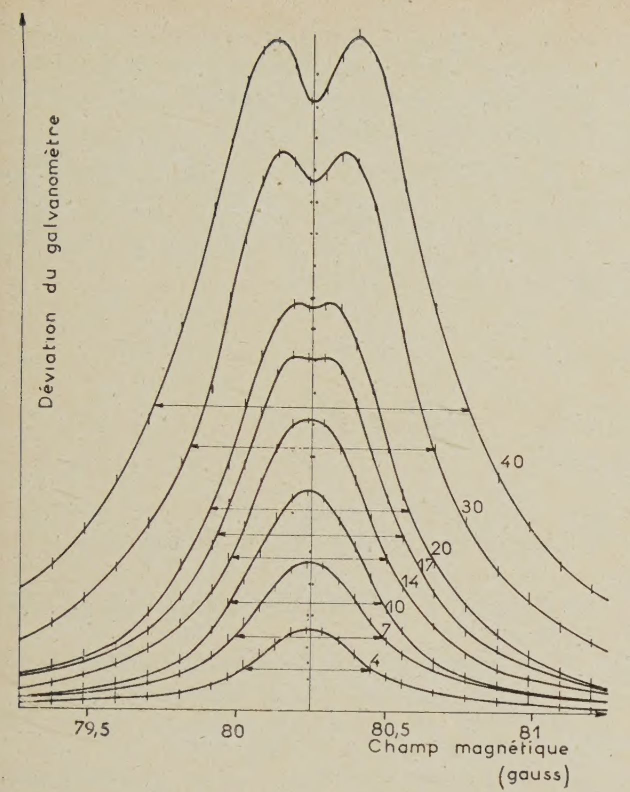


Fig. II,1. — Résonance du niveau 6 $^3F_4$ du mercure. Isotopes pairs, $\nu = 140{,}4$ Mc/s.
Pour chaque courbe, l'amplitude du champ oscillant est donnée en valeur relative.

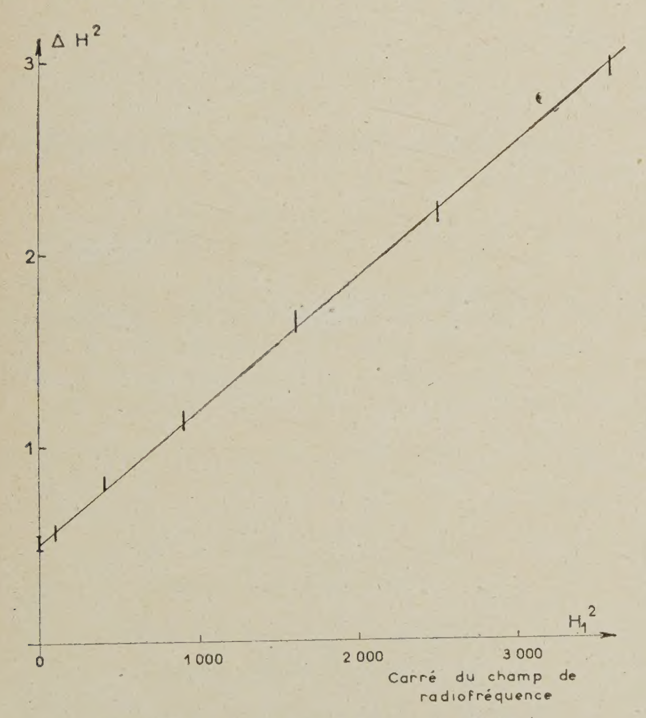


Fig. II,2. — Niveau 6 $^3F_4$, $\nu = 25$ Mc/s.
En ordonnée, le carré de la largeur à mi-hauteur (Mc/s)^2.
L'abscisse est proportionnelle au carré de l'amplitude du champ de radiofréquence.

$m \to m'$. En opérant à fréquence constante en faisant varier le champ magnétique, les différentes résonances sont décalées et leur superposition pro-

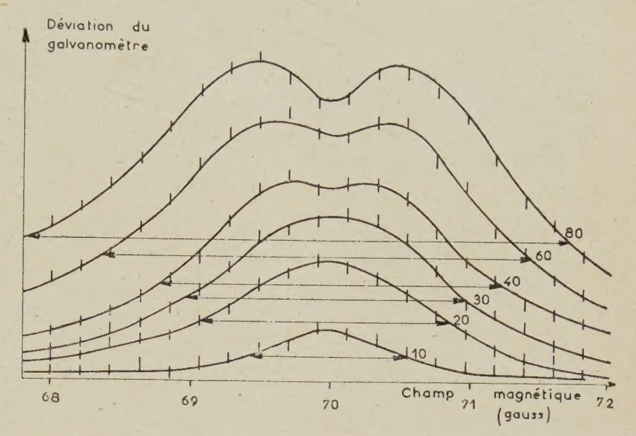


Fig. II,3. — Résonance d'un niveau $^3P_2$ du mercure. Isotopes pairs, $\nu = 140{,}4$ Mc/s.

duira un élargissement apparent de la courbe résultante.

Un calcul approximatif [4] montre que, pour que l'erreur ainsi commise sur la largeur limite soit inférieure à 1 %, il est nécessaire d'opérer dans un

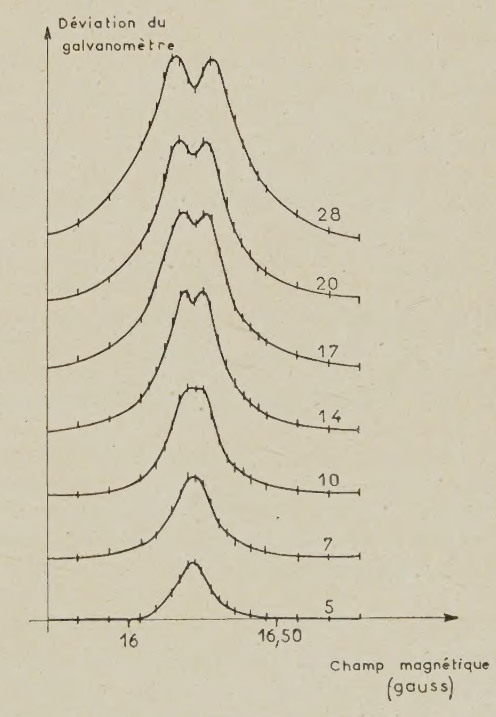


Fig. II,4. — Résonance du niveau $5d^9\,6s^2\,6p\;^1D_2$ du mercure Isotopes pairs, $\nu = 25$ Mc/s.

champ $H_0 < 40$ gauss, soit $\nu < 70$ Mc/s. La structure fine des niveaux 6 ^3F a été déduite des données numériques de Landolt et Börnstein [5]. Aucune

influence de cet effet n'a été constatée pour les niveaux $^3P_2$ et $5d^9\,6s^2\,6p\,^1D_2$.

Les figures (II,1 ; II,3 ; II,4) montrent quelques exemples de réseaux que l'on a obtenus. Sur une même figure sont tracées différentes résonances correspondant à des niveaux différents de radiofréquence. Le champ oscillant est repéré en valeur relative.

Chaque réseau de courbe est tracé deux fois dans les mêmes conditions, mais en renversant le sens du courant magnétisant dans les bobines de Helmholtz. Une moyenne permet ainsi d'éliminer le champ magnétique terrestre.

Une des droites $(\Delta\omega)^2 = \frac{4}{(\tau)^2} + a(\gamma H_1)^2$ est représentée sur la figure II,2.

Les différents résultats obtenus peuvent être groupés dans le tableau :

Niveau		$\nu = 140{,}4$ Mc/s	$\nu = 25$ Mc/s
—		—	—
$6\,^3F_4$	g	$1{,}2477 \pm 0{,}0004$	$1{,}248 \pm 0{,}003$
	τ	$(3{,}97 \pm 0{,}12) \times 10^{-7}$ s	$(4{,}49 \pm 0{,}15) \times 10^{-7}$ s
$^3P_2$	g	$1{,}4402 \pm 0{,}0007$	
	τ	$(2{,}11 \pm 0{,}08) \times 10^{-7}$ s	
$^1D_2$	g	$1{,}1203 \pm 0{,}0003$	$1{,}121 \pm 0{,}001$
	τ	$(1{,}5 \pm 0{,}3) \times 10^{-6}$ s	$(1{,}58 \pm 0{,}16) \times 10^{-6}$ s

Remarques. — 1° La valeur de τ trouvée pour le niveau $6\,^3F_4$ dans les expériences à 140 Mc/s est trop faible et est à rejeter : l'erreur provient des effets de découplage LS.

2° D'autres déterminations ont été effectuées dans le cas du niveau $6\,^3F_4$ aux fréquences de 50, 238, 307,8 et 594 Mc/s. L'accord sur le facteur de Landé est toujours excellent à la précision de ces mesures, précision qui devient médiocre en champ élevé par suite de l'échauffement des bobines de Helmholtz produisant une déformation des bobines et une modification de l'étalonnage. En outre, la mesure de la durée de vie n'a plus aucun sens, l'élargissement devenant de plus en plus important ; à 594 Mc/s la largeur limite est environ 3 fois plus grande qu'à 25 Mc/s.

3° Lorsque l'on peut négliger dans l'expression (III) les termes en bH_0^3, l'élargissement par effet de découplage est symétrique autour de la position déduite de $\omega = g\,\mu_B\,H_0$. La détermination du facteur de Landé n'est pas, dans ces conditions, affectée par l'élargissement des courbes de résonances.

4° Des mesures ont été faites à des pressions de vapeur variées en modifiant la température de la goutte de mercure. Aucune variation de la durée de vie n'a été constatée (effets de diffusion multiple négligeables) [6].

II. Isotopes impairs. — L'étude en champ faible des différentes résonances des isotopes 199 et 201 nous a permis, par l'étude des facteurs de Landé, de préciser l'identification de certains niveaux. En champ plus élevé, le découplage IJ n'est pas négligeable, les différentes transitions $m \to m'$ se produisent à des champs magnétiques différents. Chacune de ces raies se traduira par une très petite variation du taux de polarisation, le rapport signal/bruit est par suite très mauvais, et les résonances sont difficiles à identifier au milieu du bruit.

Expérimentalement, l'étude du couplage n'a pu être faite que dans le cas du niveau $6\,^3F_4$.

A. *Étude du découplage dans le cas de l'isotope* 199 *pour le niveau* $6\,^3F_4$.

Résultats expérimentaux. — Ce niveau possède deux sous-niveaux hyperfins $F = 7/2$ et $F = 9/2$ dont les facteurs de Landé sont :

$$g_F = g_J \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)} - \frac{g_I}{1\,837} \frac{F(F+1) + I(I+1) - J(J+1)}{2F(F+1)}. \quad \text{(IV)}$$

En négligeant le deuxième terme, nous pouvons écrire :

$$g_{9/2} = 1{,}25 \times 8/9 = 1{,}1111$$
$$g_{7/2} = 1{,}25 \times 10/9 = 1{,}39888.$$

En champ faible, l'effet de découplage se traduit par un élargissement de la résonance, élargissement symétrique de part et d'autre du champ magnétique correspondant au facteur de Landé g_F. Dans ces conditions, nous avons trouvé, à 140 Mc/s :

$$g_F(9/2) = 1{,}1082 \pm 0{,}0005 \qquad g_F(7/2) = 1{,}3850 \pm 0{,}0005$$

soit

niveau 9/2 $\frac{g_F}{g_J} = 0{,}8887 \pm 0{,}0003.$
Valeur théorique : 0,8888

niveau 7/2 $\frac{g_F}{g_J} = 1{,}1113 \pm 0{,}0003.$
Valeur théorique : 1,1111.

L'accord est donc excellent.

A la fréquence de 594 Mc/s, les différentes transitions $m \to m'$ sont résolues. La figure II,6 représente l'ensemble des résonances du niveau $F = 9/2$

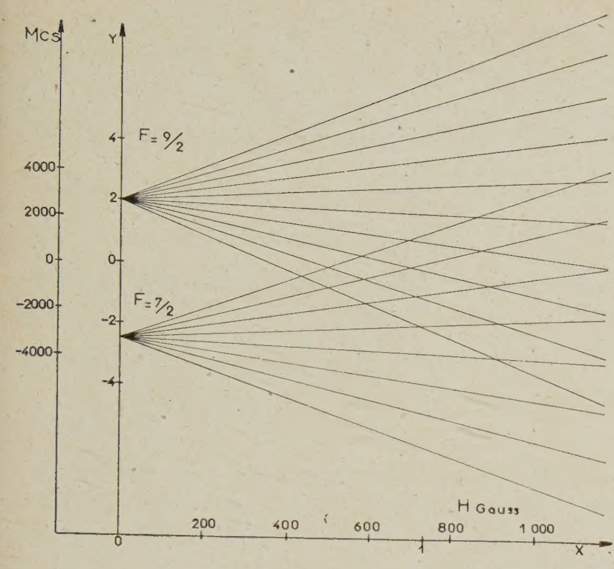


Fig. II,5. — Niveau 6 $^3F_4$, ^{199}Hg.

dans ces conditions, avec un niveau de radiofréquence élevé. La seule explication compatible avec la position des résonances est la suivante :

Les transitions D sont des résonances doubles correspondant à des transitions à deux quanta $\Delta m = 2$.

Les transitions T sont des résonances $\Delta m = 3$ correspondant à la transition à trois quanta. Elles n'apparaissent pas sur des courbes tracées à un niveau de radiofréquence plus faible.

Les flèches en pointillé marquent les positions déduites pour les résonances simples. Nous n'avons pas pu obtenir des courbes où seules les résonances simples apparaissent : lorsque le niveau de radiofréquence est faible, le rapport signal/bruit devient très mauvais, et l'étude devient impossible.

Par une interprétation qualitative des intensités relatives des trois résonances doubles $9/2 \leftrightarrow 5/2, 7/2 \leftrightarrow 3/2, 5/2 \leftrightarrow 1/2$, et des deux résonances triples, nous sommes conduits à admettre une répartition de population dans les sous-niveaux

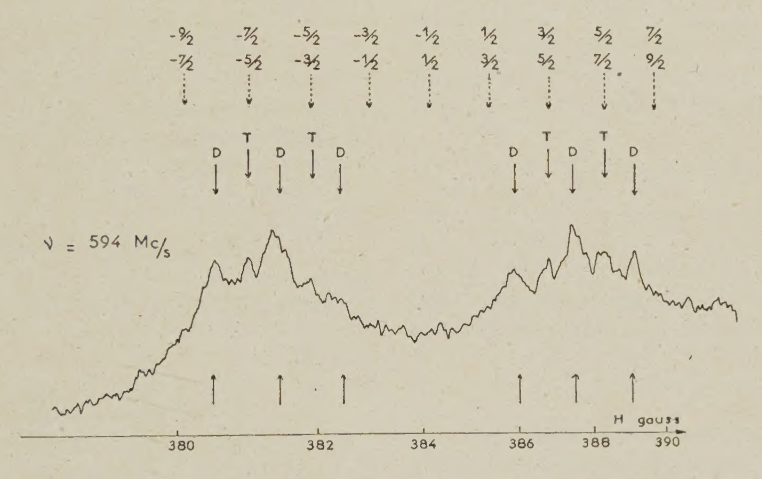


Fig. II,6. — Résonance du niveau 6 $^3F_4$, $F = 9/2$, ^{199}Hg, $\nu = 594$ Mc/s, D = résonances doubles, T = résonances triples.
Les flèches en pointillé dans la partie supérieure de la figure indiquent les positions prévues pour les résonances simples.
Les flèches dans la partie inférieure de la figure indiquent les positions théoriques des résonances doubles lorsque l'on prend $\Delta\nu = 5\,800$ Mc/s.

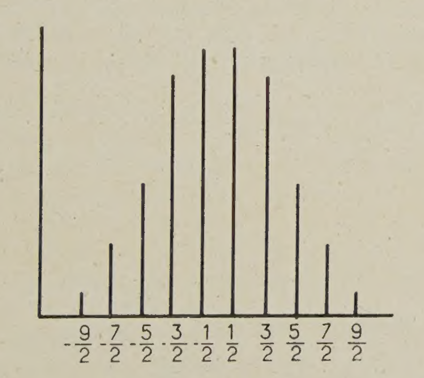


Fig. II,7. — En ordonnée, la population relative des sous-niveaux Zeeman du niveau 6 $^3F_4$, $F = 9/2$, ^{199}Hg.

excités ayant l'aspect de celle donnée par la figure II,7. Une étude précise serait très intéressante à ce point de vue, mais les niveaux énergétiques ne sont pas, comme dans le cas des isotopes pairs, en l'absence du découplage LS équidistants, et l'écart de fréquence entre deux transitions voisines est supérieure à leur largeur. Il est donc impossible d'employer, pour l'étude de ces phénomènes, les formules de Majorana. La méthode de Mlle Besset, Messiah, Horowitz et Winter [7] qui pourrait s'appliquer, est dans ce cas d'une extrême complexité.

Étude du niveau 9/2. — Les équations des courbes composant le diagramme Zeeman sont obtenues à l'aide d'un calcul classique [4]. En

négligeant le découplage LS, nous sommes conduits à diagonaliser l'opérateur.

$$\mathcal{H} = \frac{e}{2mc}(g_J \boldsymbol{J} + g_I \boldsymbol{I}) H_0 + A \boldsymbol{I}.\boldsymbol{J}.$$

Si l'on pose, en vue de simplifier les équations,

$$y = \nu/A \quad \text{et} \quad x = g_J \frac{e}{2mc}\frac{H_0}{A}$$

nous obtenons

$$m = \pm 9/2 \qquad y = 2 \pm 4x$$

$$m = \pm 7/2 \qquad (y + 2 \mp 4x)\left(y - \frac{3}{2} \mp 3x\right) - 2 = 0 \qquad \text{(V)}$$

$$m = \pm 5/2 \qquad \left(y + \frac{3}{2} \mp 3x\right)(y - 1 \mp 2x) - \frac{7}{2} = 0$$

$$m = \pm 3/2 \qquad (y + 1 \mp 2x)\left(y - \frac{1}{2} \mp x\right) - \frac{9}{2} = 0$$

$$m = \pm 1/2 \qquad \pm x = y + \frac{1}{2} - \frac{5}{y}.$$

La construction de ces différentes courbes donne le schéma tracé sur la figure II,5. La structure hyperfine $\Delta\nu$, écart en champ nul des niveaux $F = 9/2$ et $F = 7/2$, est égale à 4,5 dans ce système d'unités. Si nous exprimons A en mégacycles, nous avons :

$$\Delta\nu \text{ (mégacycles)} = 4{,}5\, A.$$

Nous avons déterminé expérimentalement l'écart entre les résonances — 9/2 ↔ — 7/2 et 9/2 ↔ 7/2 du niveau $F = 9/2$ et à partir des équations précédentes, par une résolution numérique, nous avons évalué $\Delta\nu$. L'imprécision des mesures nous conduit à :

$$\Delta\nu = 5\,800 \pm 100 \text{ Mc/s}.$$

Remarque. — Cette détermination déduite des équations (V) repose sur l'existence d'une configuration atomique $^3F_4$ parfaitement déterminée. Le cas du mercure est malheureusement plus complexe. *En outre, nous avons négligé l'influence du découplage LS*, cet effet s'étant, dans les mêmes conditions de champ magnétique, révélé faible dans le cas des isotopes pairs.

L'étude du niveau 7/2 a été également faite de la même manière, mais la résolution des différentes résonances étant moins bonne, l'erreur relative sur l'écart des résonances extrêmes est plus grande. La valeur de $\Delta\nu$ ainsi trouvée concorde avec celle déduite de l'étude du niveau 9/2.

B. *Étude du découplage dans le cas de l'isotope* 201 *pour le niveau* 6 $^3F_4$.

Nous trouvons quatre sous-niveaux hyperfins :

$$F = 5/2,\ 7/2,\ 9/2,\ 11/2$$

dont les facteurs de Landé théoriques peuvent être calculés d'après (IV) :

11/2	$g_F = g_J \times 0{,}7272$	$= 0{,}909$
9/2	$g_F = g_J \times 0{,}8282$	$= 1{,}0352$
7/2	$g_F = g_J \times 1{,}01587$	$= 1{,}2697$
5/2	$g_F = g_J \times 1{,}4285$	$= 1{,}7856$

Les structures hyperfines sont plus faibles que dans le cas de l'isotope 199, et, par suite, les effets de découplage IJ s'observent dans des champs moins élevés.

Étude expérimentale. — D'une façon générale, il sera difficile d'étudier les niveaux 7/2 et 9/2. Le niveau 7/2 a un facteur de Landé $g = 1{,}267$, et sa résonance sera superposée à celle des isotopes pairs contenus dans l'échantillon étudié. Le niveau 9/2 a un facteur de Landé voisin de 1, et les courbes de résonance pourront être déformées par des résidus de résonance type cyclotron. Des expériences ont été faites à 50 Mc/s, 140 Mc/s, 238 Mc/s et 307,8 Mc/s :

— A 50 Mc/s, le découplage est très faible, les résonances $F = 11/2$, $F = 9/2$, $F = 5/2$ sont observées, et nous obtenons :

	g	g_F/g_J
$F = 11/2$	$0{,}9051 \pm 0{,}0005$	$0{,}7268 \pm 0{,}0005$
$F = 9/2$	$1{,}0237 \pm 0{,}001$	$0{,}8280 \pm 0{,}0005$
$F = 5/2$	$1{,}781 \pm 0{,}0015$	$1{,}4290 \pm 0{,}001$

— L'interprétation des spectres obtenus est plus complexe que dans le cas de l'isotope 199 (*fig. II*,8). Lorsque le découplage est suffisant pour résoudre totalement les niveaux 9/2, 7/2 et 5/2, ces différents ensembles de résonances se superposent partiellement, et l'interprétation devient impossible. Seul le niveau 11/2 a pu être étudié à 307,8 Mc/s. Le bruit étant important, une étude comparative de

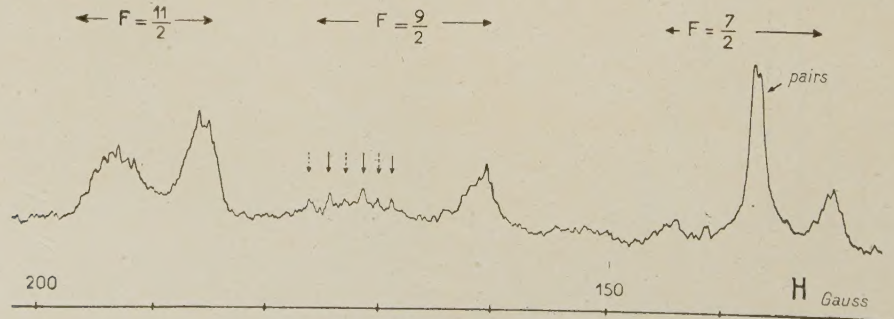


FIG. II,8. — Résonances observées sur un échantillon de mercure enrichi en ^{201}Hg (88,2 %), niveau 6 $^3F_4$, $\nu = 238$ Mc/s.

nombreux enregistrements a dû être faite pour déterminer la position des différentes résonances.

Le diagramme représentant les niveaux énergétiques en fonction du champ magnétique est donné par la figure II,9, et par une méthode ana-

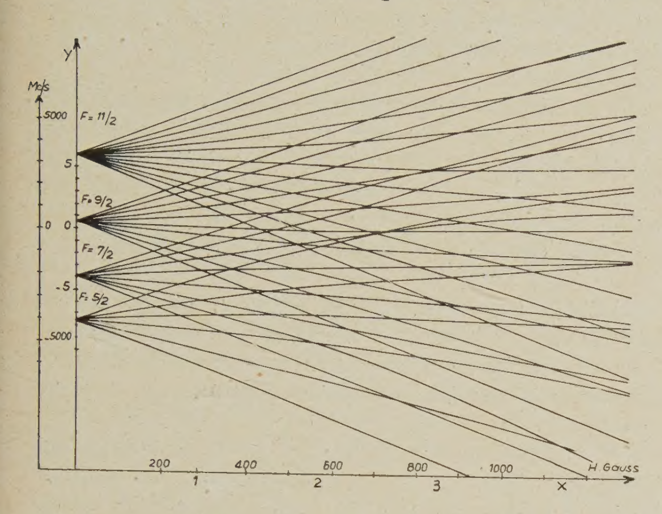


Fig. II,9. — Niveau 6 $^3F_4$, ^{201}Hg.

logue à celle employée pour le niveau $F = 9/2$ de l'isotope 199, nous avons déterminé les structures hyperfines :

$$\Delta\nu_1\ (11/2 - 9/2) = 2\ 860 \pm 50\ \text{Mc/s}$$
$$\Delta\nu_2\ (\ 9/2 - 7/2) = 2\ 340 \pm 50\ \text{Mc/s}$$
$$\Delta\nu_3\ (\ 7/2 - 5/2) = 1\ 820 \pm 50\ \text{Mc/s}.$$

Il est nécessaire de souligner que ces valeurs ont été obtenues, — comme dans le cas de l'isotope 199 —, en négligeant la structure fine. En plus, dans le cas de l'isotope 201, nous n'avons pas tenu compte du moment quadrupolaire nucléaire.

Ces différents résultats ne doivent donc être considérés que comme des ordres de grandeurs.

C. *Isotopes impairs. Étude des autres niveaux.* — Dans le cas de l'isotope 199, nous avons décelé des résonances sur les raies rouges (*fig. II*,10) et les

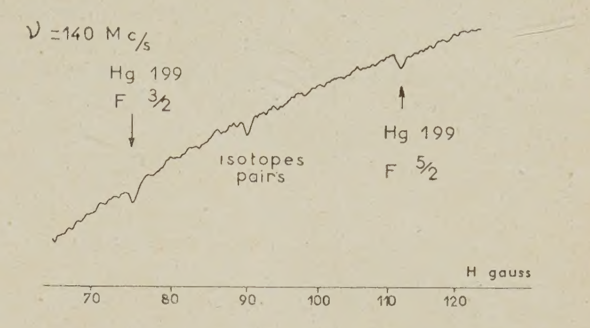


Fig. II,10. — Résonances observées sur un échantillon de mercure enrichi en ^{199}Hg (73 %), niveau $^1D_2$, $\nu = 140$ Mc/s.

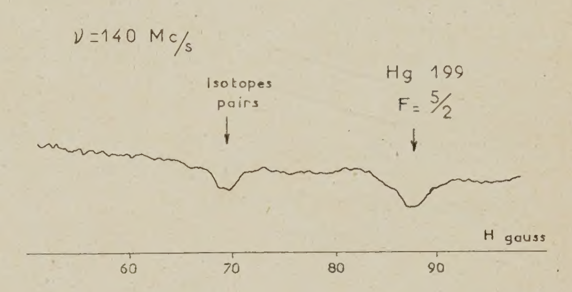


Fig. II,11. — Résonances observées sur un échantillon de mercure enrichi en 199 Hg (73 %), niveau $^3P_2$ $\nu = 140$Mc/s.

raies bleues (*fig. II*,11), correspondant respectivement aux niveaux $^1D_2$ et $^3P_2$ étudiés précédemment pour les isotopes pairs. Le rapport signal/bruit est très faible, et les résultats que nous donnons sont par suite assez imprécis. Nous n'avons fait, pour la même raison, aucune étude du découplage *IJ*.

Dans le cas des isotopes 201, nous n'avons décelé aucune résonance. Les différents résultats sont réunis dans le tableau :

	F	g expérimental	g_F/g_J expérimental	g_F/g_J théorique
$^3P_2$	3/2			
	5/2	1,15 ± 0,0005	0,7995 ± 0,0008	0,8
$^1D_2$	3/2	1,34 ± 0,01	1,198 ± 0,01	1,2
	5/2	0,902 ± 0,005	0,805 ± 0,01	0,8

Expériences sur le sodium. — Le queusot d'un tube du type n° 2 est rempli de sodium soigneusement distillé. Ce tube, ainsi que les bobines produisant le champ de radiofréquence, sont placés dans un four thermostaté. La température optimum est d'environ 180°. A des températures plus élevées, le verre de l'enceinte est rapidement attaqué.

Nous avons étudié différentes raies du spectre du sodium non absorbées par le verre du tube et dont les longueurs d'onde correspondent au domaine de sensibilité des photomultiplicateurs. Un taux de polarisation appréciable n'a été observé que sur les raies 5 $^2D_{5/2}$ — 3 $^2P_{3/2}$ (4 983 Å), 5 $^2D_{3/2}$ — 3 $^2P_{1/2}$ (4 979 Å) et 4 $^2D_{5/2}$ — 3 $^2P_{3/2}$ (5 688 Å), et nous avons décelé les résonances des niveaux 5 $^2D_{5/2}$, 4 $^2D_{5/2}$ et 5 $^2D_{3/2}$ (*fig. II*,12).

Des expériences préliminaires ont été faites à 25 Mc/s. Les facteurs de Landé, déterminés à partir de la position de ces résonances, nous montrent que le découplage *IJ* est à peu de chose près total. Les structures hyperfines de ces niveaux sont donc faibles par rapport à la fréquence de 25 Mc/s.

Différentes expériences ont été faites à 50 Mc/s. Nous constatons que la largeur limite en champ de radiofréquence nul est plus grande qu'à 25 Mc/s. Cet effet est dû au découplage LS, l'écart des niveaux $D_{5/2}$ — $D_{3/2}$ étant très faible (distance des niveaux $5\,{}^2D_{5/2}$ — $5\,{}^2D_{3/2}$ = 0,024 cm^{-1}, distance $4\,{}^2D_{5/2}$ — $4\,{}^2D_{3/2}$ = 0,033 cm^{-1}.

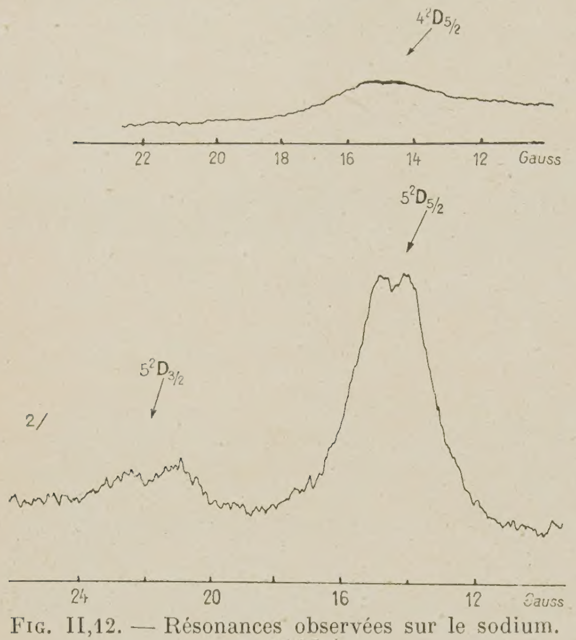


Fig. II,12. — Résonances observées sur le sodium. ν = 25 Mc/s.

Courbe 1, en haut : raies 5688 et 5683 Å.
Courbe 2, en bas : raies 4983 et 4979 Å.

La détermination de la durée de vie est donc complexe et nécessite une étude complète de l'effet Paschen-Back hyperfin et fin. Ce travail est actuellement en cours et les résultats seront donnés dans une publication ultérieure.

La méthode d'excitation électronique et ses possibilités. — Sur le mercure et sur le sodium nous n'avons décelé et étudié la résonance magnétique que de quelques niveaux seulement. Nous pouvons en préciser les raisons et définir ainsi le domaine d'application de la méthode d'excitation électronique :

1) Amplitude du champ de radiofréquence. — Pour que des transitions entre deux sous-niveaux magnétiques puissent être observées, il est nécessaire que la valeur de la probabilité de transition soit appréciable au bout d'un temps de l'ordre de la durée de vie τ. La valeur numérique du champ H_1 nécessaire peut être calculée à partir des formules de Majorana. On trouve ainsi une amplitude de l'ordre du gauss pour des durées de vie de 10^{-7} sec et d'une dizaine de gauss pour des durées de vie de 10^{-8} sec. Dans ce dernier cas, les trajectoires électroniques sont violemment perturbées, le taux de polarisation des raies émises est par suite très faible et il devient difficile d'empêcher les décharges dans l'enceinte.

La méthode d'excitation électronique, dans le cas des transitions dipolaires magnétiques, ne peut par suite *s'appliquer qu'aux niveaux dont la durée de vie est supérieure à, approximativement,* $5 . 10^{-8}$ *seconde.*

Dans l'atome de mercure, la plupart des niveaux ont une durée de vie très courte. Pour le niveau $6\,{}^1P_1$, on a $\tau < 10^{-8}$ seconde, pour le niveau $7\,{}^3S_1$, $\tau \# 10^{-8}$ seconde [8], et il en est de même des niveaux D [9]. Il est aisé de comprendre pourquoi peu de résonances ont été observées.

2) Création d'inégalité de population dans les états excités. — Dans la première partie, nous avons signalé qu'il était impossible de donner des règles générales permettant de prévoir, même de façon qualitative, les taux de polarisation. Il semble toutefois que, lorsqu'un choc électronique porte un atome de l'état fondamental, de multiplicité F, à un état excité, de multiplicité F' plus élevée ($F' \geqslant F + 2$), il y a création d'inégalité de population dans cet état excité, le choc électronique défavorisant une excitation se faisant avec $\Delta m > 1$.

Les niveaux que nous avons étudiés (${}^3F_4$, ${}^3P_2$, ${}^1D_2$ de l'atome de mercure, et $D_{5/2}$ de l'atome de sodium) satisfont cette condition.

Conclusions. — Ce travail d'exploration a donc fourni des résultats positifs et il nous montre que la méthode d'excitation électronique complète, pour l'étude des niveaux élevés, la méthode d'excitation optique, de beaucoup préférable lorsqu'elle peut s'appliquer.

Nous pouvons envisager diverses extensions :

1) Dans le cas d'un atome à spin nucléaire, il doit être possible de détecter les résonance $\Delta F = 1$. Un montage permettant d'étudier ces transitions pour le niveau $6\,{}^3F_4$ de l'isotope 201 du mercure est en cours de réalisation. Nous pourrons ainsi déterminer de façon précise les structures hyperfines dont nous avons donné un ordre de grandeur. Les résultats de cette étude seront donnés ultérieurement.

2) Par une technique tout à fait analogue à celle décrite ci-dessus, nous pourrons étudier, en bombardant une vapeur, un certain nombre d'atomes : potassium, césium, rubidium. Le cas des gaz rares pourra être également envisagé. Le problème, cependant, sera plus complexe, les spectres comportant un très grand nombre de raies.

D'autres éléments plus difficilement volatils pourront être étudiés par une technique de jet atomique. Afin d'avoir un flux lumineux comparable à celui dont on disposait avec une vapeur, il sera nécessaire d'opérer sur des jets atomiques de

grande densité. Il faudra mettre au point un montage à pompage continu en prenant des précautions particulières pour ne pas contaminer la cathode (*).

3) Les expériences que nous avons faites sur le sodium montrent que, pour cet élément, peu de raies émises par bombardement électronique sont polarisées. Si l'on crée une inégalité de population par pompage optique dans le niveau fondamental, nous pouvons penser qu'elle sera conservée lorsque les atomes seront portés dans un état excité par bombardement électronique. On peut espérer ainsi étudier de nombreux niveaux.

4) Par pompage optique, il est possible d'enrichir sélectivement les sous-niveaux magnétiques de l'état fondamental. Un effet analogue peut être obtenu par bombardement électronique. En effet, si nous réglons la tension d'accélération des électrons de façon à n'exciter dans des conditions de polarisation favorable que le premier niveau excité, il est vraisemblable que, lorsque les atomes excités retomberont à l'état fondamental, une inégalité de population sera créée dans cet état.

(*) Un tel montage a été utilisé par H. Bruck [10]. Notons toutefois que la cathode qu'il employait, était moins fragile que les cathode industrielles, au rendement beaucoup plus élevé, que nous utilisons.
E. Geneux et Mlle B. Vincenz [11] ont, par cette technique, récemment mis en évidence la résonance magnétique de plusieurs niveaux excités du cadmium.

Le bombardement électronique peuple de façon symétrique les niveaux $-m$ et $+m$, aussi, contrairement à l'excitation optique en lumière polarisée circulaire qui crée une orientation, nous ne pourrons obtenir qu'un alignement pour les niveaux fondamentaux tel que $F \geqslant 1$.

Pour obtenir un alignement appréciable, il est nécessaire, d'une part, que les raies qui correspondent à une transition entre un niveau excité et le niveau fondamental soient polarisées — le sodium est donc exclu — et, d'autre part, que les collisions sur les parois et sur les électrodes ne détruisent pas l'alignement, l'excitation électronique ne permettant pas l'emploi d'un gaz tampon. Cette dernière condition n'est pas remplie pour les métaux alcalins ; le cas de l'isotope 201 du mercure semble se présenter plus favorablement [12], si les chocs sur les parois métalliques des électrodes ne détruisent pas l'alignement.

Manuscrit reçu le 25 mars 1959.

Extrait de [13].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brossel (J.) et Bitter (F.), *Phys. Rev.*, 1952, **86**, 311.
[2] Brossel (J.), *Thèse*, Paris, 1952 ; *Ann. Physique*, 1952, **7**, 622.
[3] Bitter (F.) et Brossel (J.), A new " double resonance " method for the investigation of atomic and nuclear moment. Part I, Theory of effect in mercury vapor. Technical Report n° 176 Research Laboratory of Electronics Massachussetts Institute of Technology, 1950.
[4] Descoubes (J. P.), Diplôme d'Études Supérieures, Paris, 1958.
[5] Landolt-Börnstein, Zahlenwerte und funktionen.
[6] Barrat (J. P.) et Brossel (J.), *C. R. Acad. Sc.*, 1958, **246**, 2744.
[7] Besset (C.), Horowitz (J.), Messiah (A.) et Winter (J.), *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 251.
[8] Brossel (J.) et Julienne (Mlle C.), *C. R. Acad. Sc.*, 1956, **242**, 2127.
[9] Skinner, *Proc. Roy. Soc.*, A 1926, **112**, 642.
[10] Bruck (H.) et Minkowski, *Z. Physik*, 1935, **95**, 284. Bruck (H.), *Thèse*, Paris, 1942.
[11] Geneux (E.) et Vincenz (Mlle B.), Université de Genève, Communication privée.
[12] Cagnac (B.), Brossel (J.) et Kastler (A.), *C. R. Acad. Sc.*, 1958, **246**, 1827.
[13] Pébay-Péroula (J. C.,) *Thèse*, Paris, 1959, Microfilm C. N. R. S. n° 38 812.

SUR LES SYSTÈMES DE CORPUSCULES EN THÉORIE FONCTIONNELLE NON RELATIVISTE

Par Florence AESCHLIMANN,
Théories physiques, Institut Henri-Poincaré, Paris.

Résumé. — Examen des conditions générales conduisant à une théorie fonctionnelle non relativiste des systèmes de corpuscules. Représentation de chaque corpuscule d'un système par une fonction $u_j(P, T)$ de l'espace et du temps. Ordination formelle des corpuscules d'un système tenant compte à la fois de l'indiscernabilité des corpuscules de même espèce et de la nécessité d'exprimer le principe d'exclusion pour les fermions. Utilisation de la théorie générale des prévisions ; détermination des arguments de la fonctionnelle des prévisions, introduction de l'espace fonctionnel de configuration, détermination de la forme générale de l'équation prévisionnelle, étude des conditions de raccordement avec la mécanique ondulatoire usuelle des systèmes et avec le cas d'un corpuscule unique en théorie fonctionnelle. Énoncé du principe fondamental des équations des corpuscules : chaque fonction $u_j(P, T)$ représentant un corpuscule du système considéré obéit à une équation non linéaire dépendant des autres fonctions $u_k(P, T)$ du système. Étude sommaire des conditions de raccordement avec la mécanique classique.

Abstract. — A study of the general conditions required to set up a non-relativistical functional theory for systems of particles. Representation of each particle of a system by a space-time function $u_j(P, T)$. Formal classification for the particles of the system with respect to indiscernability and the exclusion principle for the fermions. Using the general theory of predictions, the arguments of the functional for predictions are fixed, functional configuration-space is introduced and the general form of the equation for the predictional elements is determined. Conditions incurred by the limiting cases of the usual wave mechanics for systems and of the single particle in the functional theory of particles. Fundamental principle for the equations of motion concerning the particles of a system : each function $u_j(P, T)$ describing a particle of the system obeys a non-linear equation which depends upon the functions $u_k(P, T)$ of the other particles of the system. Brief investigation of the limiting case of classical mechanics.

1. **Introduction.** — L'étude des systèmes de corpuscules en théorie fonctionnelle non linéaire pose des problèmes très difficiles qui n'ont pas encore été abordés. Le cas de la théorie non relativiste est évidemment celui par lequel il convient d'essayer de commencer cette étude car, d'une part il permet de laisser de côté toutes les questions de propagation des interactions et, d'autre part, il permet de considérer un système d'un nombre déterminé de corpuscules. Il est bien clair que l'on ne peut se limiter à l'étude d'un corpuscule unique dans un champ donné et que tout problème ayant un intérêt physique fait intervenir un système de corpuscules. En théorie des systèmes apparaissent des circonstances qui ne se présentent pas dans le cas d'un seul corpuscule et c'est là ce qui fait l'intérêt de l'étude des systèmes, même en théorie non relativiste.

2. **La théorie fonctionnelle des corpuscules.** — En théorie fonctionnelle [1], un corpuscule C est représenté par une fonction de point de l'espace physique et du temps, soit $u(P, T)$ dite *onde physique*, tandis qu'en mécanique classique comme en mécanique ondulatoire usuelle, un corpuscule est représenté par un point M de l'espace physique qui est supposé euclidien à trois dimensions. Cette hypothèse fondamentale de la théorie fonctionnelle permet de traiter le cas d'un corpuscule dans un champ donné ; mais comment généraliser cette hypothèse dans le cas d'un système ? C'est là une première question fondamentale préalable.

On admet de plus que la fonction $u(P, t)$ appartient à un espace fonctionnel séparable (R_u) [2] et qu'elle obéit à une équation non linéaire

$$\mathcal{L}\, u = Q(u, \nabla) \tag{1}$$

où Q est un terme non linéaire en u et ses dérivées et où $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire tel que

$$\mathcal{L}\, \psi = 0 \tag{2}$$

est l'équation d'onde de la mécanique ondulatoire usuelle du problème correspondant. Si alors on considère un système, comment ces conditions seront-elles généralisées ? Nous avons là une seconde question fondamentale préalable. Examinons d'abord ces deux questions.

3. **Comparaison avec la théorie de Schrödinger.** — En mécanique ondulatoire usuelle dans le cas d'un système, d'après la théorie développée par Schrödinger [3], il y a pour le système une seule onde ψ qui se propage dans l'espace de configu-

ration du système en obéissant à une équation d'onde linéaire

$$\mathcal{L}\,\psi = 0.$$

La condition que nous avons énoncée ci-dessus concernant l'équation de l'onde physique u dans le cas d'un corpuscule unique ne peut subsister inchangée dans le cas d'un système : ou bien la liaison entre l'équation (1) en u et l'équation (2) en ψ exprimée par le même opérateur $\mathcal{L}$ disparaît, ou bien on aura pour le système une seule onde u qui se propagera dans l'espace de configuration.

Comme l'a fait remarquer depuis longtemps M. Louis de Broglie [4], l'espace de configuration est un espace fictif, une construction mathématique auxiliaire que la mécanique classique a introduit pour l'étude d'un système de points matériels en mouvement dans l'espace physique. De même en microphysique, c'est dans l'espace physique qu'il faut considérer les corpuscules, quelle que soit la façon dont on les représente.

En mécanique ondulatoire usuelle, un corpuscule est figuré par un point variable libre dans l'espace physique (point M dont les coordonnées sont 3 variables libres x, y, z) ; pour un système de n corpuscules dont les n points M_j figurent les corpuscules, on peut former un point variable libre M de l'espace de configuration. La fonction d'onde ψ a une signification purement prévisionnelle ; à partir de cette fonction, on calcule toutes les prévisions concernant le système. On doit donc avoir une seule fonction ψ pour tout le système (et non une fonction ψ_i pour chaque corpuscule C_i) car une évolution dans le temps n'a de sens que pour la totalité du système et non pour chaque partie le constituant. Les arguments de cette fonction ψ doivent être les points figurant les corpuscules du système, soit

$$\psi = \psi(M_1, M_2, \ldots, M_n, t).$$

On peut considérer la fonction ψ comme une onde se propageant dans l'espace de configuration. D'autre part, en mécanique classique, le mouvement d'un système est régi par une seule fonction, la fonction de Jacobi S de l'espace de configuration; comme à l'approximation de l'optique géométrique, la description de la mécanique ondulatoire doit se raccorder avec la description classique, il faut que le système soit décrit par une seule fonction ψ se propageant dans l'espace de configuration. Ceci vient justifier le fait de considérer l'onde ψ dans l'espace de configuration.

4. **Le premier principe de la théorie fonctionnelle.** — En théorie fonctionnelle, on admet tout d'abord qu'un corpuscule C est représenté par une onde physique $u(P, T)$ (de même qu'en mécanique ondulatoire usuelle, il est représenté par un point M), qui se propage dans l'espace physique. Un corpuscule n'est jamais complètement séparé des autres corpuscules ; au contraire la notion de système a quelque chose d'artificiel, elle n'apparaît que par une coupure établie entre les corpuscules du système et le reste de l'univers. Donc on ne peut changer qualitativement la représentation d'un corpuscule, qu'on le considère comme isolé, comme appartenant à un système déterminé, ou comme appartenant à tout l'univers : si dans l'un des cas, un corpuscule est représenté par un point M, il demeurera représenté par ce point M dans tous les cas ; si c'est une fonction $u(P, T)$ qui le représente dans l'un des cas, c'est une telle fonction qui le représentera dans tous les cas. Nous sommes ainsi conduits à admettre ce premier principe fondamental :

Principe de la représentation : *Les corpuscules* C *d'un système physique* S *seront représentés chacun par une fonction* $u(P, T)$.

Ainsi se trouve donnée une réponse à la première question préalable.

5. **Ordination des corpuscules.** — La mécanique ondulatoire usuelle des systèmes nous a appris que les corpuscules de même espèce sont indiscernables et qu'une ordination de corpuscules de même espèce est dénuée de signification physique. Cependant, en mécanique ondulatoire on numérote les corpuscules et les points variables libres qui les représentent, sachant que les quantités ayant une signification physique seront définies à une permutation des corpuscules de même espèce près, donc à une permutation près des points variables qui les représentent. En effet, les points variables représentant les corpuscules figurent comme arguments dans les fonctions d'ondes ψ du système. Un numérotage se trouve fixé par les places des arguments dans la fonction : il y a n places d'arguments pour des points variables dans une fonction ψ du système. Le point variable M mis à la j^e place prend de ce fait un numéro par la place qu'il occupe, on le notera M_j ; il doit être distinct du point variable qui occupe une autre place, par exemple la k^e place ; même s'il représente un corpuscule de même espèce que M_j, il est un point variable différent qu'on notera M_k. Cette ordination formelle est indispensable à la représentation mathématique du système, mais cela ne lui confère aucune signification physique ; il y a un ordre dans les points variables figurant les corpuscules comme il y a un ordre dans les mots d'un texte, cet ordre ne se transmet pas dans les choses mais il est indispensable à la description théorique. On respectera l'indiscernabilité des corpuscules de même espèce en fixant que les propriétés physiques seront définies à une permutation près des corpuscules.

De plus l'ordination des points figurant les corpuscules est indispensable pour la formulation de

certaines lois physiques, par exemple pour exprimer le principe d'exclusion de Pauli lorsqu'on pose que la fonction d'onde ψ change de signe si l'on permute deux fermions. Pour que l'on puisse permuter, il faut que la permutation soit formulable, qu'on ait préalablement fixé formellement un ordre permettant de distinguer le cas où la permutation est effectuée de celui où elle n'a pas été effectuée, de façon qu'on sache quel signe mettre devant la fonction ψ. S'il n'y avait pas ordination formelle des corpuscules, une permutation des arguments de ψ ne serait pas descriptible, il ne pourrait pas y avoir changement de signe de ψ lors d'une permutation, la fonction d'onde ψ serait symétrique. Ainsi *une ordination formelle des éléments représentant les corpuscules est essentielle pour la formulation du principe d'exclusion de Pauli.*

6. **Prévisions en théorie fonctionnelle.** — Dans les raisonnements précédents, le fait que les corpuscules soient représentés par des points variables libres en mécanique ondulatoire usuelle n'intervient pas d'une façon effective. Les raisonnements doivent être répétés sans changement si l'on représente les corpuscules par des fonctions $u(P, T)$, mais ce qui intervient essentiellement, c'est que l'on peut calculer des prévisions sur le système. C'est sur les fonctions d'ondes ψ servant à calculer les prévisions que se formulent les conditions de symétrie ou d'antisymétrie (formulation du principe d'exclusion) en mécanique ondulatoire, non sur des éléments intrinsèques au système.

Le but minimum que l'on peut fixer à une théorie physique est de permettre le calcul de prévisions (même si l'on exige davantage d'une théorie physique) car s'il n'y a pas prévisions, il ne peut y avoir vérification expérimentale et par suite connexion avec l'expérience physique. Mais ce but minimum est quand même le but pratique le plus important, même si l'on se fixe comme but fondamental une explication rationnelle, si bien que dans toute théorie physique il y aura des éléments permettant le calcul de prévisions ; la théorie fonctionnelle des corpuscules ne peut échapper à cette condition. D'autre part, de même que la mécanique ondulatoire est tenue de se raccorder à la mécanique classique au moyen de l'approximation d'optique géométrique, la théorie fonctionnelle doit se raccorder à la mécanique ondulatoire usuelle par l'approximation qui consiste à remplacer la représentation fonctionnelle par la représentation ponctuelle. Pour formuler ce raccordement de façon précise, il suffit d'utiliser les résultats de la théorie générale des prévisions : à chaque observation maximale du système S considéré, effectuée à un instant t_0, on peut faire correspondre un élément initial X_0, et à cet X_0 correspond à l'instant t un élément de prévision $X(t)$. A l'approximation de la mécanique ondulatoire, X_0 se réduit à une fonction d'onde initiale ψ_0 et $X(t)$ à une fonction d'onde $\psi(t)$ du système. Un élément de prévision $X(t)$ dépend du système S considéré, c'est-à-dire dépend de l'ensemble des n corpuscules constituant le système S. Un élément $X(t)$ est un être mathématique ; s'il dépend des n corpuscules du système, ce ne peut être que par l'intermédiaire de leur représentation mathématique ; c'est donc une fonction de n éléments représentant les n corpuscules du système S. Comme nous avons adopté une représentation fonctionnelle, $X(t)$ *doit être une fonctionnelle des n fonctions* $u_1(P, T)$, $u_2(P, T)$, ..., $u_n(P, T)$ *représentant les n corpuscules du système* S, soit

$$X(t) = X[u_1(P, T), u_2(P, T), \ldots, u_n(P, T) ; t].$$

Les conditions de symétrie (bosons) et d'antisymétrie (fermions) s'exprimeront [5] sur les éléments X exactement comme en mécanique ondulatoire usuelle sur les fonctions

$$\psi(M_1, M_2, \ldots, M_n, t).$$

7. **Espace fonctionnel de configuration.** — L'espace de configuration de la mécanique ondulatoire usuelle est formé par le produit cartésien de n espaces euclidiens à 3 dimensions, chacun correspondant à l'un des corpuscules, c'est-à-dire à l'un des points variables représentant un corpuscule du système, chacun de ces points variables parcourant l'espace euclidien pris comme espace physique.

En adoptant la notation de la somme directe $\oplus$, le point variable M représentant le système dans l'espace de configuration sera donc formé à partir des points M_j représentant les corpuscules par la relation

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_j \oplus \ldots \oplus M_n.$$

Ce qui est constitué par un point variable de l'espace de configuration, c'est donc l'ensemble des éléments mathématiques représentant les corpuscules du système en mécanique ondulatoire.

En théorie fonctionnelle, les éléments mathématiques représentant les corpuscules du système sont les n fonctions $u_j(P, T)$, par suite c'est l'ensemble de ces éléments qui doit constituer l'espace de configuration du système. Chacune des fonctions $u_j(P, T)$ appartient à l'espace (R_u) des fonctions u. *L'espace de configuration* (C) *sera donc ici un espace fonctionnel, et le point u de cet espace représentant le système* S *sera la somme des n fonctions* $u_j(P, T)$ *représentant les corpuscules*, soit :

$$C = (R_u) \times (R_u) \times \ldots \times (R_u)$$

$$u(P, T) = u_1(P, T) \oplus u_2(P, T) \oplus \ldots \oplus u_j(P, T) \oplus \ldots \oplus u_n(P, T).$$

Alors, de même qu'en mécanique ondulatoire usuelle, la fonction d'onde ψ du système a pour

arguments le point M et le temps t de l'horloge de l'observateur, soit $\psi(M, t)$, en théorie fonctionnelle, l'élément de prévision X aura pour arguments le point u de l'espace fonctionnel de configuration (C) et le temps t de l'horloge de l'observateur, soit $X[u(P, T), t]$.

8. **Les équations prévisionnelles.** — Il nous faut maintenant chercher une réponse à la seconde question préalable et déterminer des équations pour l'évolution du système. Nous ne sommes guère guidés dans cette recherche que par des conditions de raccordement : d'abord, raccordement avec la mécanique ondulatoire usuelle des systèmes, ensuite avec la théorie fonctionnelle du corpuscule unique, enfin avec la mécanique classique des systèmes.

Dans une théorie nouvelle, il reste toujours des traces de la structure de la théorie plus ancienne ; c'est en cela que consiste la persistance des structures formelles [6]. En théorie fonctionnelle des systèmes de corpuscules, il restera donc des éléments de la structure formelle de la mécanique ondulatoire des systèmes usuelle. Mais cette mécanique ondulatoire est purement prévisionnelle ; ce n'est donc que sur le plan prévisionnel que cette mécanique peut nous fournir des conditions et de telles conditions seront très insuffisantes pour parvenir à une réponse à la question posée. Examinons-les cependant tout d'abord.

Les éléments de prévision $X(t)$ sont la généralisation pour la théorie fonctionnelle des fonctions d'onde ψ de la mécanique ondulatoire usuelle ; c'est donc sur ces éléments $X(t)$ que se portera ce qui subsiste en théorie fonctionnelle de la structure de la mécanique ondulatoire. Tout d'abord, nous pouvons faire intervenir les conditions qui résultent de la théorie générale des prévisions. En premier lieu, les éléments de prévision $X(t)$ appartiennent à un espace abstrait $(\mathcal{Y})$ qui en général n'est pas un espace de Hilbert, mais qui contient au moins un espace de Hilbert. D'autre part, nous pouvons introduire un opérateur d'évolution $\mathcal{U}(t, t_0)$ tel que

$$X(t) = \mathcal{U}(t, t_0) X_0 \ ; \qquad (3)$$

toute équation d'évolution des prévisions peut alors s'exprimer par une équation sur l'opérateur d'évolution $\mathcal{U}(t, t_0)$. En mécanique ondulatoire des systèmes usuelle, l'équation d'évolution dérive immédiatement de l'équation d'ondes ; on a

$$H_{\mathrm{MO}} \, \mathcal{U}_{\mathrm{MO}} = - i\hbar \frac{\partial \mathcal{U}_{\mathrm{MO}}}{\partial t} \qquad (4)$$

où H est l'opérateur hamiltonien du système, soit

$$H_{\mathrm{MO}} = \sum_j \frac{1}{2m_j} \boldsymbol{p}_j^2 + V_{\mathrm{MO}}(M_1, M_2, \ldots, M_n, t).$$

où $V_{\mathrm{MO}}(M_1, M_2, \ldots, M_n, t)$ est le potentiel de la mécanique classique et où

$$\boldsymbol{p}_j =_d i\hbar \nabla_j$$

s'il n'y a pas de champ magnétique, et où

$$\boldsymbol{p}_j =_d i\hbar \nabla_j - \frac{\varepsilon}{c} \boldsymbol{A}$$

en présence d'un champ magnétique dérivant d'un potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$. En désignant par T_{MO} l'opérateur énergie cinétique du j^{e} corpuscule on peut encore écrire

$$H_{\mathrm{MO}} = \sum_j T_{\mathrm{MO}.j} + V.$$

La théorie générale des prévisions conduit pour $\mathcal{U}$ à l'équation intégrale [7] :

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \mathcal{U}^0(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(t, \tau) \, \mathcal{U}(\tau, t_0) \, d\tau$$

où $\mathcal{U}^0(t, t_0)$ est l'opérateur d'évolution d'un système fictif, dit substratum de S, qui obéit à une équation de la forme

$$H_0 \, \mathcal{U}^0 = - i\hbar \frac{\partial \mathcal{U}^0}{\partial t}.$$

En théorie non relativiste des systèmes, sans création ni annihilation de corpuscules dans le système S étudié, on doit admettre que l'opérateur $\mathcal{U}$ est dérivable et que par suite $\mathcal{F}$ est dérivable, et ceci conduit à l'équation différentielle

$$(H_0 + R(t)) \, \mathcal{U} = - i\hbar \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \qquad (5)$$

avec

$$R(t) = \mathcal{F}(t, t).$$

En comparant avec l'équation (4) de la mécanique ondulatoire, on voit que l'on est conduit à poser

$$H = H_0 + R(t)$$

et à admettre que l'opérateur $\mathcal{U}$ en théorie fonctionnelle obéit à une équation de la forme (5) Comme opérateur H_0, on peut prendre celui correspondant au substratum S_0 formé par les mêmes corpuscules que S, mais qui sont supposés sans interaction entre eux ; ceci conduit à poser

$$H_0 = \sum_j T_j.$$

Au lieu de considérer l'équation (5) entre opérateurs, en utilisant la relation (3), on obtient une équation sur les éléments de prévision X. Ainsi finalement, la persistance des structures de la mécanique ondulatoire usuelle en théorie fonctionnelle nous conduit au principe suivant :

Principe des prévisions : *Pour un système* S *de corpuscules en théorie fonctionnelle non relativiste*

les fonctionnelles de prévision $X(u, t)$ obéissent à une équation de la forme

$$HX = -i\hbar\frac{\partial X}{\partial t}$$

avec

$$H = \sum_j T_j + R$$

où T_j serait l'opérateur H correspondant au cas du j^e corpuscule considéré isolément et où R est un terme lié à l'interaction des corpuscules entre eux.

La fonctionnelle X a pour arguments un élément u de l'espace fonctionnel de configuration (C) et le temps t de l'horloge de l'observateur. Cette fonctionnelle X est un élément de l'espace ($\mathcal{Y}$) des éléments de prévision. L'espace ($\mathcal{Y}$) contient au moins un espace de Hilbert. Les opérateurs T_j, R, H sont des opérateurs de l'espace ($\mathcal{Y}$).

9. **Les équations fondamentales.** — Le principe précédent exprime ce qui subsiste en théorie fonctionnelle de la structure de la mécanique ondulatoire usuelle des systèmes, mais ces conditions prévisionnelles ne contiennent aucun élément propre à la théorie fonctionnelle des corpuscules ; le fait qu'un corpuscule soit représenté par une fonction n'intervient pas d'une manière essentielle. Dans le cas d'un corpuscule unique (soumis ou non à un champ extérieur), nous avons l'équation (1) à laquelle doit obéir toute fonction u représentant le corpuscule. Cette fonction u dépend du corpuscule et des circonstances dans lesquelles il est placé, en d'autres termes la fonction u dépend du corpuscule et du reste de l'univers, ce reste de l'univers manifestant son influence par le terme V contenu dans l'opérateur $\mathcal{L}$, par le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ et par le terme non linéaire Q. Si au lieu de considérer le corpuscule comme étant isolé, on le considère comme un élément d'un système S, ceci ne change aucune condition physique, mais change seulement le sens de ce que nous appelons système et de ce que nous appelons le reste de l'univers. Il doit donc obéir encore à la même équation, mais dans les termes V, $\boldsymbol{A}$, Q, nous devons distinguer une partie due à l'influence de l'extérieur du système S et une partie due à l'influence des autres corpuscules du système. Ceci naturellement concerne le cas d'interactions assez faibles pour que l'on puisse, avec une adéquation suffisante, considérer un corpuscule comme isolé. Le même raisonnement de raccordement avec le cas d'un corpuscule isolé peut être appliqué à chaque corpuscule du système. Mais si les interactions se renforcent, il n'y a aucun élément qui puisse venir détruire l'équation

$$\mathcal{L}_j u_j = Q_j$$

du j^e corpuscule du système ; seule la forme des termes peut changer. Ainsi les conditions de raccordement avec le cas d'un corpuscule unique conduit à admettre ce principe fondamental :

Principe des équations des corpuscules : *Chaque corpuscule C_j d'un système S est représenté par une fonction $u_j(P, T)$ qui obéit à une équation*

$$\mathcal{L}_j u_j = Q_j \qquad (6)$$

où $\mathcal{L}_j$ est un opérateur linéaire de l'espace (R_u) et Q_j un terme non linéaire qui est un élément de l'espace (R_u). L'opérateur $\mathcal{L}_j$ et le terme Q_j dépendent des fonctions $u_k(P, T)$ représentant les autres corpuscules du système.

Ainsi on a un système de n équations en $u_1(P, T)$, $u_2(P, T)$, ..., $u_n(P, T)$ pour caractériser l'évolution d'un système de n corpuscules. Aux raisons générales données ci-dessus concernant l'adoption de ce principe viennent s'ajouter les raisons données par M. Louis de Broglie dans le cadre plus strict de la théorie de la double solution [8].

10. **Raccordement avec la mécanique classique.** — La théorie fonctionnelle des systèmes de corpuscules doit aussi se raccorder avec la mécanique classique. Le raccordement concernant l'aspect prévisionnel est automatiquement satisfait par le raccordement avec la mécanique ondulatoire usuelle, puisque cette mécanique se raccorde par approximation d'optique géométrique avec la mécanique classique. Mais par le principe précédent, nous venons d'admettre un postulat beaucoup plus fort que ceux de la mécanique ondulatoire usuelle. Il faut donc examiner s'il y a bien raccordement avec la mécanique classique. Le principe précédent fixe qu'il y a une équation pour chaque corpuscule du système. Le raccordement s'effectuera d'abord en remplaçant la représentation fonctionnelle par une représentation ponctuelle. Dans ce cas, les équations (6) vont se trouver remplacées par des équations sur les points M_j représentant les corpuscules. Nous obtiendrons donc un système d'équations correspondant à chaque corpuscule ; ceci est bien en accord avec le principe des équations différentielles de la mécanique classique des systèmes de points matériels ; ces équations s'explicitent sous la forme

$$m\,\vec{\Gamma}_j = \vec{F}_j. \qquad (7)$$

La condition de raccordement avec la mécanique classique exige donc qu'à partir des équations (6), en effectuant les approximations convenables, on retombe sur les équations précédentes. Ceci vient fournir des conditions sur les opérateurs $\mathcal{L}_j$; nous les examinerons ultérieurement. Mais on voit déjà que la condition de raccordement avec la mécanique classique fournit un argument de plus pour qu'il y ait une équation pour chaque corpuscule, d'où un système d'équations (6) pour un système de corpuscules, et non pas une seule équation.

En mécanique ondulatoire usuelle, on doit aussi avoir une persistance de la structure introduite par les équations (7) ; mais comme cette théorie est purement prévisionnelle, avec représentation ponctuelle des corpuscules, les équations (7) doivent subsister comme équations entre opérateurs ; c'est bien ce que l'on constate [8]. Ici, par la représentation fonctionnelle des corpuscules, il apparaît un aspect de la théorie qui n'est pas prévisionnel et qui exige un raccordement de nature différente, c'est pourquoi le raccordement avec la mécanique ondulatoire usuelle ne suffit pas et que la mécanique classique vient imposer directement d'autres conditions.

Il y a enfin d'autres conditions de raccordement, ce sont celles avec la théorie de la double solution à l'approximation linéaire, théorie étudiée par MM. Louis de Broglie et Andrade e Silva [9] ; nous les étudierons après avoir terminé l'étude des conditions de raccordement avec la mécanique classique.

Conclusion. — La conclusion de cette étude est donc qu'on peut construire une théorie fonctionnelle non relatiste des systèmes de corpuscules qui satisfasse aux conditions de raccordement avec la mécanique ondulatoire usuelle des systèmes et avec la mécanique classique. Dans cette théorie, chaque corpuscule C_j du système étudié est représenté par une fonction $u_j(P, T)$ de l'espace et du temps appartenant à un espace fonctionnel séparable (R_u). Chaque fonction $u_j(P, T)$ obéit à une équation de la forme (6). Un système de n corpuscules a donc son évolution régie par un système de n équations de la forme (6). La forme précise de ces équations est donnée à partir des conditions de raccordement avec la mécanique classique et avec le cas du corpuscule isolé.

Manuscrit reçu le 6 janvier 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aeschlimann (F.), *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 600-604 ; 1954, **15**, 752. Recherches sur la notion de système physique, Thèse Doctorat ès-Sciences physiques, Paris, 1957. Destouches (J. L.), La quantification en théorie fonctionnelle des corpuscules, Gauthier-Villars, Paris, 1956. Corpuscules et champs en théorie fonctionnelle, Gauthier-Villars, Paris, 1958.

[2] Destouches (J. L.), La quantification en théorie fonctionnelle des corpuscules, Gauthier-Villars, Paris, 1956, p. 3.

[3] Schrödinger, *Ann. Physik*, 1927, **82**, 265.

[4] De Broglie (L.), *J. Physique Rad.*, 1927, **7**, 235. La physique quantique restera-t-elle indéterministe ?, Gauthier-Villars, Paris, 1953. Une interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire (théorie de la double solution), Gauthier-Villars, Paris, 1956.

[5] Destouches (J. L.), Corpuscules et systèmes de corpuscules, Gauthier-Villars, Paris, 1941. Principes fondamentaux de physique théorique, Hermann, Paris, 1942, t. II. Février (P.), La structure des théories physiques, Presses Universitaires, Paris, 1951, p. 91-318. L'interprétation physique de la mécanique ondulatoire et des théories quantiques, Gauthier-Villars, Paris, 1956.

[6] Cazin (M.), *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, 541 et 805. Aeschlimann (F.), *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **232**, 695-697. Recherches sur la notion de système physique, *Thèse*, Paris, 1957.

[7] Février (P.), *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 1742-1744 ; 1951, **233**, 604-606. La structure des théories physiques, Presses Universitaires, Paris, 1951, p. 258-260

[8] Aeschlimann (F.), *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **236**, 364 et 1140. Recherches sur la notion de système physique, Thèse Doctorat ès-Sciences, Paris, 1957.

[9] De Broglie (L.) et Andrade e Silva (J.), *C. R. Acad. Sc.*, 1957, **244**, 529-533. Andrade e Silva (J.), *C R. Acad. Sc.*, 1957 **245**, 1893-1895, 2018-2021 ; 1958, **246**, 391-393.

ÉTUDE DES CARACTÉRISTIQUES D'UN SPECTROGRAPHE β UTILISANT UN CHAMP MAGNÉTIQUE A *rH* CONSTANT

Par C. BASTARD, J. LAFOUCRIÈRE et R. MARGRITA,
Institut de Physique Nucléaire de l'Université de Lyon.

Résumé. — On étudie les caractéristiques d'un spectrographe β utilisant un champ magnétique inhomogène à rH constant. Une méthode d'approximation appliquée à l'ordinateur I. B. M. 650 permet de construire les trajectoires gauches des particules chargées et de déterminer la forme des aberrations de sphéricité axiales.

Abstract. — A study has been made of the characteristics of a β spectrograph using an inhomogenous magnetic field of constant rH. The twisted paths of the changed particles are computed with an I. B. M. 650 calculator for the determination of axial aberrations of sphericity.

Nous avons vu, dans un précédent article [1], l'avantage que présentent les trajectoires trochoïdales [2] pour l'études des spectres β. Le champ magnétique utilisé est un champ de révolution possédant un plan de symétrie et tel que le produit rH soit constant, r étant la distance à l'axe de révolution et H la valeur du champ dans le plan de symétrie. L'étude des trajectoires planes des particules chargées, soumises à l'action de ce champ, nous a montré qu'un spectrographe β utilisant ces trajectoires posséderait une focalisation radiale parfaite. Une équation approchée nous a permis de construire les trajectoires gauches, toutefois, nous avons dû nous placer dans les conditions de validité de cette équation, ce qui ne permettait pas d'utiliser au maximum les possibilités du spectrographe. Nous avons repris l'étude des trajectoires gauches à partir des équations générales de manière à pouvoir discuter les caractéristiques du spectrographe dans le cas général. Signalons que les calculs ont été effectuées à l'aide d'un ordinateur I. B. M. 650.

I. **Rappel des équations des trajectoires.** — Les particules de charge e décrivent des trajectoires dont les équations sont (1), (3) (coordonnées cylindriques)

$$\text{I}\begin{cases} mr'' = mr\,\varphi'^2 + e\varphi'\dfrac{\partial}{\partial r}(rA) \\ mr^2\,\varphi' + erA = C \\ mZ'' = e\varphi'\dfrac{\partial}{\partial z}(rA) \end{cases}$$

où m est la masse relativiste et A la composante suivant Oz du potentiel vecteur, les deux autres composantes étant nulles. La fonction rA (rz) est égale à

$$Kr\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{1/2} \qquad (4)$$

avec $K = r_0 H_0$, r_0 étant la distance de la source à Oz et H_0 la valeur du champ dans le plan de symétrie.

La constante C peut s'exprimer de la manière suivante : appelons θ_0 l'angle de la vitesse initiale v_0 avec un plan parallèle au plan de symétrie, u_0 l'angle de la tangente au cercle de rayon r_0, centré sur l'axe Oz avec la projection sur le plan de ce cercle de la tangente à la trajectoire, on a

$$r_0\,\varphi_0 = v_0'\cos\theta_0\cos u_0$$

d'où

$$C = r_0(mu_0\cos\theta_0\cos v_0 + eK).$$

Posons

$$k = \frac{eK}{mv_0}, \qquad C = r_0\,mv_0\,(\cos\theta_0\cos u_0 + k).$$

Le système I s'écrit :

$$\text{II}\begin{cases} \varphi' = v_0[r_0(\cos\theta_0\cos u_0 + k) - k(r^2+z^2)^{1/2}] \\ r'' = r\varphi'\left(\varphi' + \dfrac{kv_0}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right) \\ Z'' = \dfrac{kv_0\,\varphi' z}{(r^2+z^2)^{1/2}}. \end{cases}$$

Lorsque $\theta_0 = 0$, les trajectoires sont situées dans le plan de symétrie et le mouvement est défini par les deux intégrales premières

$$\text{III}\begin{cases} r'^2 + r^2\,\varphi'^2 + z'^2 = v_0^2 \\ mr^2\,\varphi' + erA = C. \end{cases}$$

Intégrales qui s'intègrent facilement (3).

Si $k \leqslant 1$ les trajectoires ont des branches infinies, ce cas ne nous intéresse pas.

Si $k \geqslant 1$: on obtient des trajectoires trochoïdales (*fig.* 1).

Quelque soit l'angle u_0, toutes les trajectoires issues d'un même point S se recoupent sur le

cercle $r = r_0$ à une distance angulaire de S égale à la précession

$$\delta = 2\pi\left(1 - \frac{k}{(k^2 - 1)^{1/2}}\right).$$

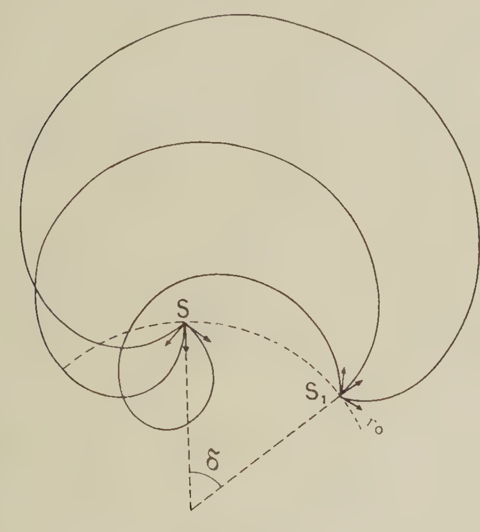


Fig. 1.

On montre également que les trajectoires correspondant à 2 angles u_0 et u'_0 se déduisent l'une de l'autre par une rotation et une homothétie de rapport

$$\frac{\cos u'_0 + k}{\cos u_0 + k}.$$

II. **Caractéristiques du spectrographe.** — Les caractéristiques du spectrographe vont dépendre de plusieurs facteurs à savoir k, r_0, u_0 et θ_0, il faut tenir compte aussi des dimensions des trajectoires, ceci ayant surtout une importance en vue de la réalisation pratique.

1° Focalisation radiale. — Nous avons vu dans le paragraphe précédent que les trajectoires situées dans le plan de symétrie et issues d'un point source S se recoupaient toutes en un même point situé sur le cercle $r = r_0$ à une distance angulaire de S égale à

$$\delta = 2\pi\left(1 - \frac{k}{(k^2 - 1)^{1/2}}\right)$$

la focalisation radiale est donc parfaite et nous pouvons prendre une ouverture radiale importante. La direction moyenne de tir a été prise perpendiculaire au cercle $r = r_0$, cette disposition nous permet en effet de séparer facilement la source et le dispositif récepteur par un écran (*fig. 2a*), celui-ci sert également à arrêter les trajectoires parasites qui correspondraient à des valeurs de k donnant des précessions sous-multiples de la précession, des trajectoires des particules détectées. Une direction moyenne de tir parallèle au cercle $r = r_0$ (*fig. 2b*) ne permettrait pas d'arrêter ces trajectoires. L'ouverture radiale a été prise égale à 90°, valeur qui nous a semblé la plus raisonnable pour placer l'écran précédent et le dispositif récepteur.

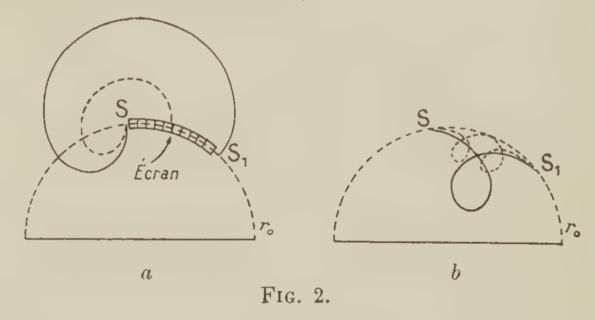


Fig. 2.

Deux directions de tir perpendiculaires au cercle $r = r_0$ sont possibles, l'une dirigée vers l'intérieur du cercle $r = r_0$ ($u_0 = 90°$, *fig. 3a*), l'autre vers l'extérieur ($u_0 = -90°$ *fig. 3b*) nous

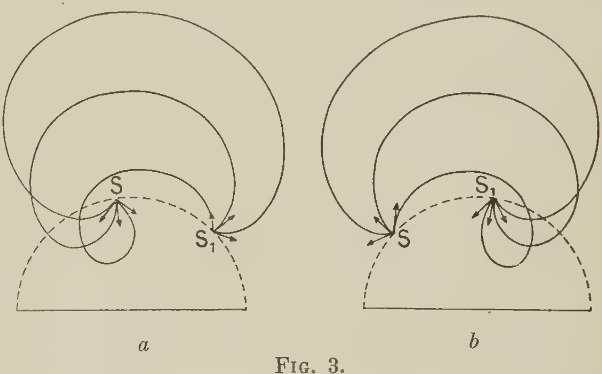


Fig. 3.

verrons plus loin s'il existe un avantage théorique à choisir l'une plutôt que l'autre, nous pouvons cependant déjà remarquer que la première solution est la meilleure au point de vue pratique car elle laisse plus de place pour le dispositif récepteur.

2° Dimensions des trajectoires. — On peut montrer [3] :

1° Que les trajectoires planes restent comprises entre deux cercles de rayons

$$r_1 = \frac{r_0(\cos u_0 + k)}{k+1} \text{ et } r_2 = \frac{r_0(\cos u_0 + k)}{k-1};$$

$$r_m = \frac{r_0(\cos u_0 + k)}{k}$$

étant le rayon moyen c'est-à-dire la valeur de r pour laquelle $d\varphi/dr = 0$.

2° Que les trajectoires gauches restent situées à l'intérieur d'une surface de révolution d'axe Oz dont la méridienne a l'aspect de la figure 4. Les courbes tracées sont des ellipses dont le grand axe est égal à

$$\frac{kr_0(\cos\theta_0 \cos u_0 + k)}{k^2 - 1}$$

et le petit axe à

$$\frac{r_0\,(\cos\theta_0\cos u_0 + k)}{(k^2 - 1)^{1/2}}$$

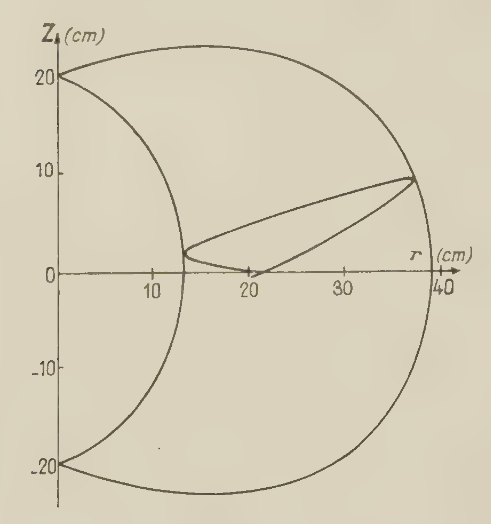


Fig. 4.

Les parallèles dans le plan de symétrie ont pour rayons

$$r'_1 = \frac{r_0\,(\cos\theta_0\cos u_0 + k)}{k+1}$$

et

$$r'_2 = \frac{r_0\,(\cos\theta_0\cos u_0 + k)}{k-1}.$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de δ, r_1, r_2, r_m pour les valeurs de k allant de 1,3 à 2 et pour u_0 égal à 45°, 90° et 135°, r_0 ayant été pris égal à 20 cm.

k	δ	$u_0 = 45°$	$u_0 = 90°$	$u_0 = 135°$
		r_1 = 17,5 cm	r_1 = 11,3 cm	r_1 = 5,2 cm
1,3	203°22′	r_2 = 133,8 cm	r_2 = 86,7 cm	r_2 = 39,5 cm
		r_m = 30,9 cm	r_m = 20 cm	r_m = 9,1 cm
		r_1 = 17,6 cm	r_1 = 11,7 cm	r_1 = 5,8 cm
1,4	154°22′	r_2 = 105,3 cm	r_2 = 70 cm	r_2 = 34,6 cm
		r_m = 30,1 cm	r_m = 20 cm	r_m = 9,9 cm
		r_1 = 17,7 cm	r_1 = 12 cm	r_1 = 6,3 cm
1,5	122°59′	r_2 = 88,3 cm	r_2 = 60 cm	r_2 = 31,7 cm
		r_m = 29,4 cm	r_m = 20 cm	r_m = 10,6 cm
		r_1 = 17,7 cm	r_1 = 12,3 cm	r_1 = 6,9 cm
1,6	101°31′	r_2 = 76,9 cm	r_2 = 53,3 cm	r_2 = 29,8 cm
		r_m = 28,8 cm	r_m = 20 cm	r_m = 11,2 cm
		r_1 = 17,8 cm	r_1 = 12,6 cm	r_1 = 7,4 cm
1,7	85°8′	r_2 = 68,8 cm	r_2 = 48,6 cm	r_2 = 28,4 cm
		r_m = 28,3 cm	r_m = 20 cm	r_m = 11,7 cm
		r_1 = 17,9 cm	r_1 = 12,9 cm	r_1 = 7,8 cm
1,8	72°56′	r_2 = 62,7 cm	r_2 = 45 cm	r_2 = 27,3 cm
		r_m = 27,9 cm	r_m = 20 cm	r_m = 12,1 cm
		r_1 = 18 cm	r_1 = 13,1 cm	r_1 = 8,2 cm
1,9	63°54′	r_2 = 57,9 cm	r_2 = 42,2 cm	r_2 = 26,5 cm
		r_m = 27,4 cm	r_m = 20 cm	r_m = 12,6 cm
		r_1 = 18 cm	r_1 = 13,3 cm	r_1 = 8,6 cm
2	55°26′	r_2 = 54,1 cm	r_2 = 40 cm	r_2 = 25,9 cm
		r_m = 27,1 cm	r_m = 20 cm	r_m = 12,9 cm

3° Pouvoir dispersif. — Le pouvoir dispersif est donné par la formule $\gamma = \frac{dx}{d\rho H}$ x étant l'abscisse curviligne du point image sur le cercle $r = r_0$ et ρH égal à $\frac{mv_0}{e}$, mv_0 étant l'impulsion initiale de la particule

$$x = r_0\,\delta \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{dk} = \frac{2\pi\,r_0}{(k^2-1)^{1/2}}$$

$$k = \frac{r_0\,H_0}{\rho H} \quad \text{donc} \quad \gamma = \frac{2\pi\,k}{(k^2-1)^{1/2}}\,\frac{r_0}{\rho H}. \qquad (1)$$

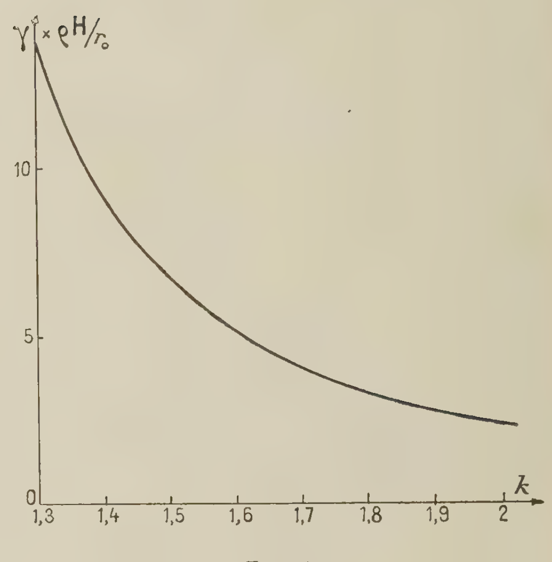


Fig. 5.

La figure 5 représente la courbe donnant la variation du pouvoir dispersif en fonction de k.

4° Focalisation axiale. — L'étude de la focalisation axiale nous amène à construire les trajectoires gauches solutions du système II, ce système n'étant pas intégrable, nous devons utiliser une méthode d'approximation, les calculs ont été effectués à l'aide d'un ordinateur I. B. M. 650. La formule d'approximation utilisée est une formule polynomiale due à Milne [5] elle est identique à celle déjà employée pour résoudre l'équation approchée des méridiennes (1). Cette formule fait intervenir une récurrence entre trois points successifs :

$$\begin{cases} r_{n+1} = 2r_n - r_{n-1} + t^2\,r''_n \\ z_{n+1} = 2z_n - z_{n-1} + t^2\,z''_n. \end{cases}$$

Le premier point est obtenu à l'aide des formules

$$\begin{cases} r'_{n+1} = r'_n + t r''_n \\ r_{n+1} = r_n + t r'_n + \frac{t^2}{2}\,r''_n \end{cases} \qquad \begin{cases} z'_{n+1} = z'_n + t z''_n \\ z_{n+1} = z_n + t z'_n + \frac{t^2}{2}\,z''_n. \end{cases}$$

Une étude complète nécessiterait la construction des trajectoires correspondant à des valeurs de k allant de 1,3 à 2. θ_0 variant de 0 à 20° et u_0 de 45°

à 135° et de — 45° à — 135°. Cette étude conduisant à un calcul trop important, nous l'avons séparé en deux. La construction des méridiennes $z = f(r)$ pour $k = 2$ à l'aide de l'équation approchée (1) met en évidence une concentration des trajectoires au voisinage du plan $z = 0$ mais pour une valeur de r différente de r_0. Dans un premier calcul nous avons construit les courbes $z = f(r)$ pour un angle θ_0 donné 9°, deux valeurs de u_0 : 90° et — 90°, k prenant les valeurs 1,3 ; 1,4 ; 1,5 ; 1,6 ; 2. Ceci afin de choisir la valeur de k et la direction de tir donnant la meilleure focalisation. Ce choix étant fait, nous avons construit les trajectoires correspondant à différentes valeurs de θ_0 et de u_0.

III. **Choix du paramètre k et de la direction de tir.** — Les courbes de la figure 6 donnent la variation en fonction de k de la cote z_f du point d'intersection des trajectoires avec le cylindre $r = r_0$ pour $u_0 = 90°$ et $u_0 = — 90°$. Les deux courbes sont sensiblement identiques, il n'y a pas lieu de préférer l'une à l'autre au point de vue théorique, nous choisirons $u_0 = 90°$ car nous avons vu plus haut que cette valeur est plus satisfaisante que $u_0 = 90°$ du point de vue pratique.

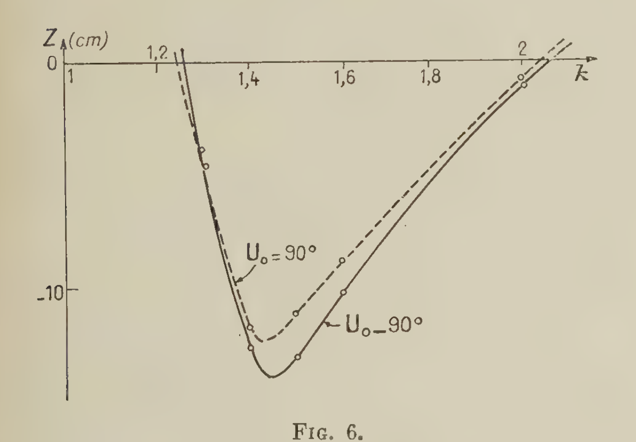


Fig. 6.

La courbe de la figure 6 correspondant à $u_0 = 90°$ montre que pour la focalisation axiale deux valeurs de k sont favorables $k = 1,25$ et $k = 2,04$, théoriquement la première solution est la meilleure car elle donne un pouvoir dispersif bien plus grand que celui de la deuxième, par contre elle est pratiquement beaucoup moins satisfaisante par suite de l'encombrement des trajectoires comme le montre le tableau du deuxième paragraphe, le rayon maximum r_2 pour $k = 1,25$ et $u_0 = 45°$ est en effet égal à 156 cm, il serait difficile d'obtenir un champ en r^{-1} sur une aussi grande distance. D'autre part la cote maximum z_m des trajectoires est égale à 17,8 cm pour $k = 1,25$ et 9,4 cm pour $k = 2,04$, un entrefer de 36 cm rendrait très difficile la production d'un champ assez intense. Pour $k = 1,25$ la précession est égale à 240° ce qui oblige à utiliser une cuve à vide dont le volume est pratiquement égal à celui compris entre deux cylindres de rayons 160 cm et 4 cm (rayons maximum et minimum des trajectoires planes) et de hauteur 36 cm soit environ 300 litres, par contre pour $k = 2,04$ on peut se contenter (voir *fig.* 1) d'une cuve dont le volume est celui compris entre deux cylindres de rayons 55 cm et 8 cm, de hauteur 20 cm et deux plans diamétraux faisant un angle de 120° soit un volume de 60 litres environ.

La réalisation d'un spectrographe avec $k = 1,25$ présenterait donc de grosses difficultés pratiques pour la production du champ magnétique et l'obtention du vide, nous avons donc effectué la 2e partie du calcul avec $k = 2,04$.

IV. **Étude détaillée dans le cas où k = 2,04.** — 1) Focalisation radiale. — Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent la focalisation radiale est parfaite. La précession δ est dans ce cas égale à 53°.

2) Pouvoir dispersif. — Le pouvoir dispersif est donné par la formule (1) où $k = 2,04$ et $r_0 = 20$ on trouve

$$\gamma = \frac{45,5}{\rho H}.$$

Un spectrographe du type Siegbahn possédant une orbite stationnaire de 20 cm de rayon a un pouvoir dispersif égal à $\gamma = \frac{80}{\rho H}$ et un spectrographe à champ uniforme dont les trajectoires ont pour rayon 20 cm un pouvoir dispersif égal à $\gamma = \frac{40}{\rho H}$, il faut remarquer toutefois que dans notre cas les trajectoires s'écartent assez loin du cercle $r = r_0$ (voir *fig.* 1) et que l'encombrement est beaucoup plus important que celui d'un spectrographe du type Siegbahn ou d'un spectrographe à champ uniforme.

3° Focalisation axiale. — Nous avons construit les trajectoires gauches en utilisant la méthode de Milne à l'ordinateur 650, les valeurs de θ_0 et u_0 utilisées sont les suivantes :

$u_0 = 90°$ $\theta_0 = 3°, 6°, 9°, 12°, 15°, 18°, 21°$
$u_0 = 45°$ $\theta_0 = 3°, 9°, 15°, 21°$
$u_0 = 135°$ $\theta_0 = 3°, 9°, 15°, 21°$.

Les courbes des figures 7 et 8 représentent la variation de z en fonction de r c'est-à-dire les courbes méridiennes des surfaces de révolution sur lesquelles sont tracées les courbes gauches (3) pour θ_0 égal à 3° et 9° et u_0 égal à 90° et 45°.

La variation de la cote z_f du point d'intersection des trajectoires avec le cylindre $r = r_0$ en fonction de θ_0 pour u_0 égal à 90°, 45° et 135° est représentée

sur la figure 9. En utilisant une équation approchée, nous avons trouvé pour $u_0 = 90°$ une fonction linéaire en nous limitant aux valeurs de θ_0

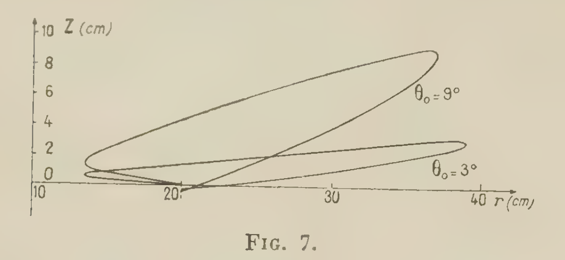


Fig. 7.

inférieures à 10°, il semble d'après la courbe précédente que la limite supérieure de θ_0 valable pour cette équation doit être prise un peu inférieure à cette valeur.

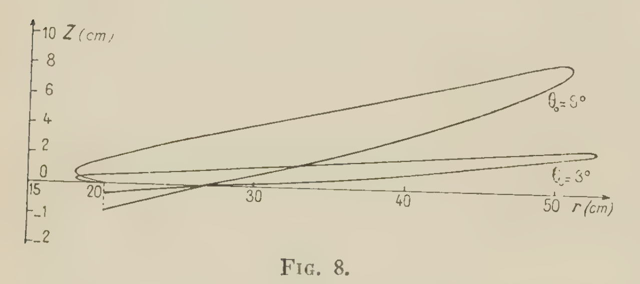


Fig. 8.

Pour $u_0 = 135°$ les trajectoires correspondant à $\theta_0 = 15°$ et $\theta_0 = 21°$ ne recoupent pas le cylindre $r = 20$ cm lors de la première boucle, ceci est dû au

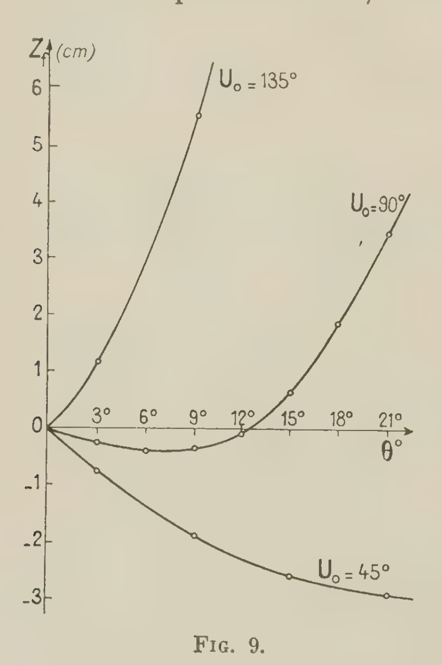


Fig. 9.

fait qu'elles rencontrent les surfaces de révolution auxquelles elles sont tangentes (voir 1er paragraphe) à une distance inférieure à 20 cm. La figure 10 représente la courbe $z = f(r)$ pour $\theta_0 = 15°$ et la méridienne de la surface de révolution qui lui est tangente.

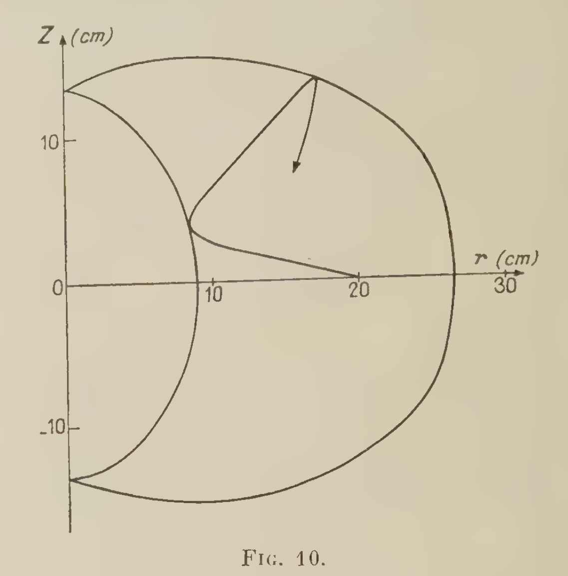


Fig. 10.

4° Formation de l'image d'un point. — Un point source S donne une image sur le cylindre $r = 20$ cm. L'étude de la variation de la cote Z_f des points d'intersection des trajectoires avec ce cylindre en fonction de la précession δ permet de mettre en évidence la formation de cette image, la dimension de l'image dans la direction perpendiculaire à Oz est en effet proportionnelle à δ puisqu'elle est égale à $r_0 \delta = 20 \delta$, δ étant exprimé en radian.

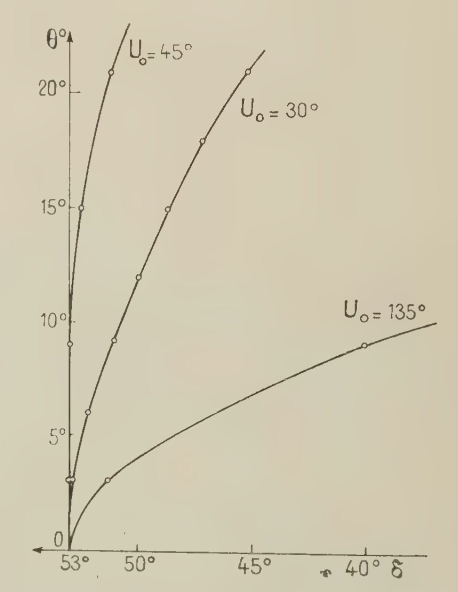


Fig. 11. — Sur la coube médiane lire : $U_0 = 90°$.

Lorsque l'angle θ_0 est différent de 0 la précession n'est plus égale à 53° mais varie en fonction de θ_0.

La valeur de la précession est donnée par l'intégrale

$$\delta = \int_{r_n}^{r_0} \varphi'(t)\, dt$$

où $\varphi'(t)$ est donné par le système II

$$\varphi'(t) = \frac{v_0[r_0 (\cos\theta_0 \cos u_0 + k) - k(r^2 + z^2)^{1/2}]}{r^2}.$$

Cette intégrale a été calculée par la méthode de Simpson. Les courbes de la figure 11 donnent la variation de δ en fonction de l'angle θ_0 pour $u_0 = 45°$, $u_0 = 90°$ et $u_0 = 135°$. Les courbes de la figure 12 donnent la variation de z_f en fonction de δ pour les mêmes valeurs de u_0.

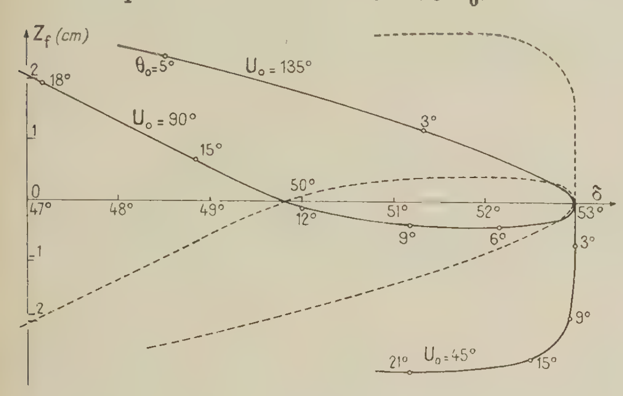


Fig. 12.

Si nous utilisons comme récepteur un compteur possédant une fenêtre de longueur L, nous voyons que pour une certaine valeur u_i' de u_0 la courbe $z_f = f(\delta)$ correspondant à cette valeur sera tangente à la droite $z_f = L$.

L'image d'un point source prend différentes formes suivant les valeurs de u_0.

Pour u_0 compris entre 45° et u_i' elle a l'espect de la figure 13*a*.

Pour u_0 compris entre u_i' et 90° elle a l'aspect de la figure 13*b*.

Pour u_0 compris entre 90° et 135° elle a l'aspect de la figure 13*c*.

En définitif, si u_0 varie de 90° à 135° l'image a la forme de la surface hachurée de la figure 13*d*.

Les résultats précédents montrent que la largeur de l'image correspond à une variation de la précession égale environ à 2° ; si on voulait détecter l'image en entier, il faudrait utiliser un compteur dont la fenêtre aurait 2,8 cm de long, il est évident que ceci entraînerait un mauvais pouvoir séparateur, il est donc nécessaire de prendre une largeur de fenêtre beaucoup moins importante, l'image d'un point se réduit alors pratiquement à une surface rectangulaire.

Dans un prochain article nous étudierons la position et la forme à donner aux diaphragmes, le pouvoir séparateur et la luminosité du spectrographe.

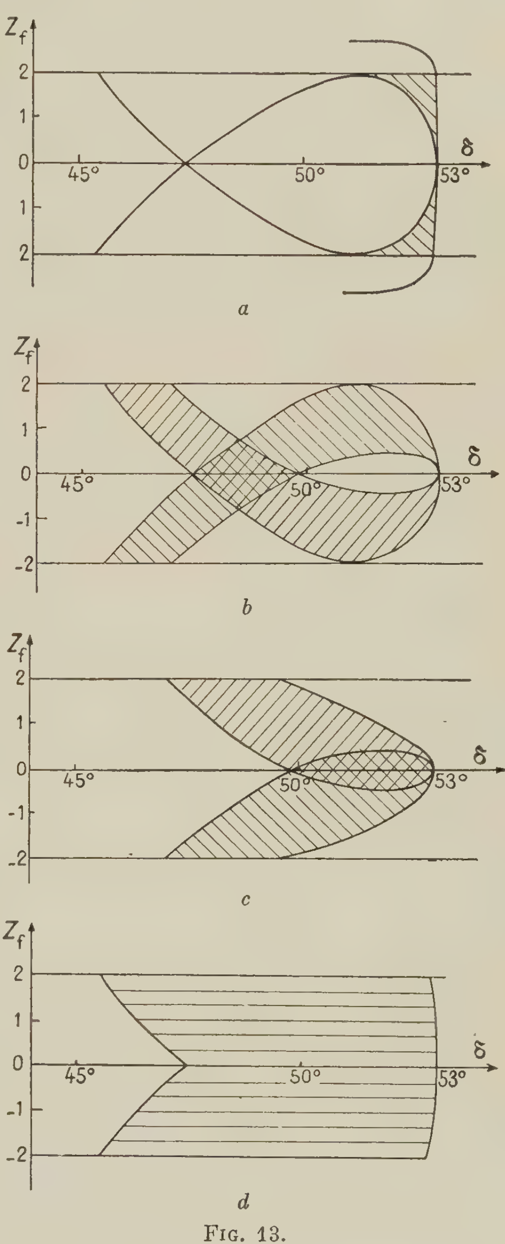


Fig. 13.

Nous tenons à remercier M. le Pr J. Thibaud, Directeur de l'Institut de Physique Nucléaire pour l'intérêt qu'il a bien voulu prendre à notre étude et les facilités qu'il nous a accordées.

Manuscrit reçu le 11 mai 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bastard (C.) et Lafoucrière (J.), *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 674.

[2] Thibaud (J.), *C. R. Acad. Sc.*, 1933, **197**, 447, 915, 1629 et *Phys. Rev.*, 1934, **45**, 787.

[3] Bastard (C.), *Thèse*, 3e cycle.

[4] Moussa (A.) et Lafoucrière (J.), *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **233**, 239.

[5] Milne (We), Numerical calculus 142.

VARIATIONS DES PROPRIÉTÉS OPTIQUES DE COUCHES MINCES D'OR EN FONCTION DE LEUR VITESSE DE FORMATION

Par R. PHILIP,

Laboratoire de Physique Générale, Faculté des Sciences de Marseille.

Résumé. — On a étudié l'influence, sur les propriétés optiques de couches minces d'or obtenues par évaporation, de la vitesse de formation du dépôt. On a utilisé pour cela trois séries de couches préparées respectivement avec des vitesses de formation de 0,8, 3 et 25 mμ à la minute. Toutes les couches d'une même série, dont les épaisseurs variaient entre 0 et 70 mμ, ont été préparées au cours de deux évaporations conduites pratiquement à la même vitesse. On montre que les propriétés optiques des couches varient beaucoup avec la vitesse de projection. En particulier l'absorption A' d'une couche d'or de 60 mμ d'épaisseur peut être multipliée par 25 lorsque la vitesse de formation passe de 25 à 0,8 mμ à la minute.

Abstract. — A study has been made of the influence of the speed of formation on the optical properties of evaporated gold films. Three series of evaporated layers have been prepared respectively with a speed of 08, 3 and 25 mμ by minute. Evaporated films of similar series, the thickness of which varied from 0 to 70 mμ, have been prepared during two evaporations made as nearly as possible at the same speed. It was found that the optical properties vary a great deal according to the speed of formation. Specially, the absorption A' of a 60 mμ thick film may be multiplied by 25 when the speed of formation is increased from 25 to 0.8 mμ by minute.

I. Introduction. — Dans un article publié en 1950, Sennet et Scott [1] ont étudié qualitativement au microscope électronique l'influence de la vitesse de formation sur la structure de couches minces métalliques obtenues par évaporation thermique. Ils ont ainsi montré que les couches métalliques minces étaient d'autant plus lacunaires que leur vitesse de formation était plus faible. Ils ont ensuite étudié quantitativement les variations des propriétés optiques de ces couches minces avec leur structure. Mais leurs mesures sont incomplètes (ils ne mesurent pas le facteur de réflexion R' à l'intérieur du support), peu précises ($\pm$ 2 %) et il n'est tenu compte de la présence du support de la couche mince que par une correction « approximative ». Ces mesures n'ont donc pas pu conduire à la détermination des constantes optiques des couches.

II. Mesures. — Dans le présent travail nous étudions 3 séries de couches minces d'or déposées sur un support en quartz, sous un vide voisin de 10^{-5} mm de mercure, avec des vitesses de formation de 0,8, 3 et 25 mμ à la minute. On appelle vitesse de formation d'une couche le quotient de son épaisseur « massique » par la durée de l'évaporation (1).

A l'aide d'un disque, genre disque de Talbot, nous avons pu obtenir simultanément, au cours de chacune des évaporations, 9 couches minces d'épaisseurs croissant en progression arithmétique et formées rigoureusement dans les mêmes conditions (en particulier même vitesse de formation). Chacune des courbes présentées ci-dessous a donc été obtenue à l'aide de deux évaporations seulement conduites à des vitesses de formation sensiblement égales.

Pour chacune des couches minces étudiées nous avons mesuré, à moins de 0,5 % près, le facteur de transmission T, les facteurs de réflexion côté air R et côté support R' ; nous en avons déduit les absorptions correspondantes $A = I - R - T$ et $A' = I - R' - T$. L'évaporateur [2] ainsi que le principe des mesures [3] ont déjà été décrits. Les courbes ci-dessous résument les résultats obtenus. L'auteur tient à la disposition des lecteurs qui voudraient en prendre connaissance les tableaux numériques des résultats expérimentaux obtenus.

III. Discussions. — A) Les courbes des figures 1 à 9 présentent, pour les 3 vitesses de formation étudiées, les variations de T, R, R', A et A' en fonction de l'épaisseur de la couche métallique.

1° COURBES RELATIVES AU FACTEUR DE TRANSMISSION T. — Pour toutes les longueurs d'onde étudiées et pour une épaisseur quelconque comprise entre 0 et 70 mμ, le facteur de transmission T est toujours d'autant plus grand que la vitesse de formation des couches est plus grande. C'est ainsi (*fig.* 1) que pour la longueur d'onde 6 438 Å et pour une même épaisseur de 16 mμ, T passe de 0,18 pour une couche formée à la vitesse de 0,8 mμ à la

(1) L'épaisseur « massique » est obtenue en pesant, avant et après l'évaporation thermique une lamelle couvre-objet de microscope de surface connue et en supposant que la densité du métal en couche mince est la même que celle du métal massif. On sait que, cette hypothèse est inexacte et ne constitue qu'une approximation commode.

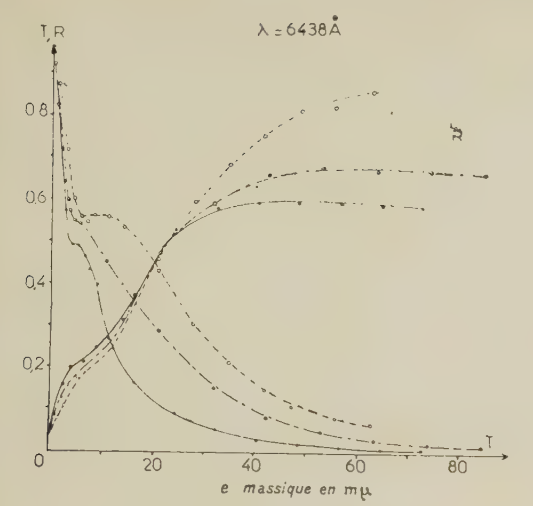


FIG. 1.

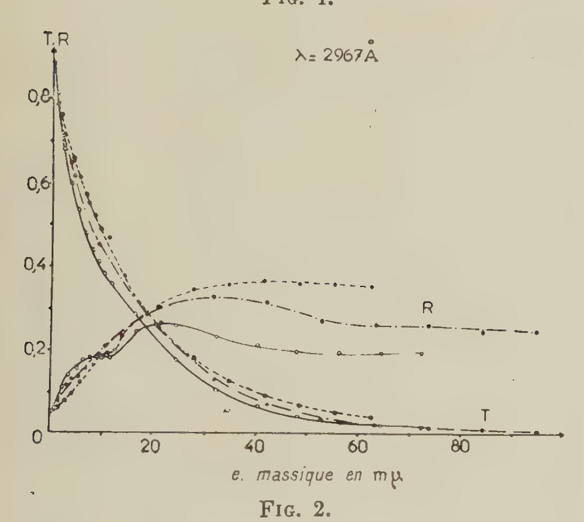


FIG. 2.

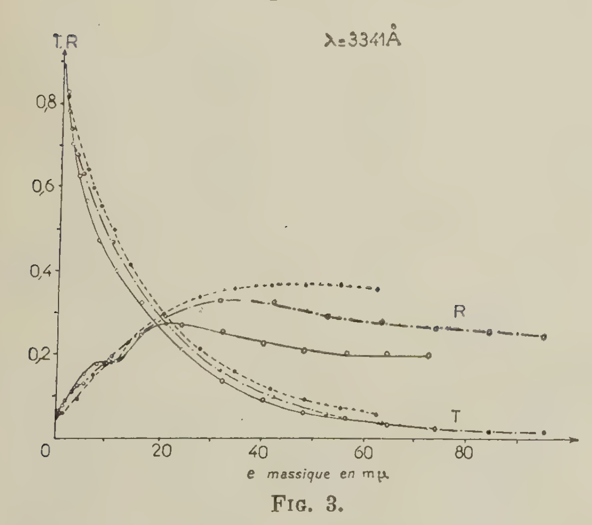


FIG. 3.

FIG. 1, 2 et 3. — Variations du facteur de transmission T et du facteur de réflexion côté air R, en fonction de l'épaisseur massique de la couche mince d'or, pour les 3 vitesses de formation étudiées et pour les 3 longueurs d'onde 6 438 Å ; 2 967 Å ; 3 341 Å.

minute à 0,51 pour une couche formée à la vitesse de 25 mμ à la minute.

Cet écart est plus petit pour les radiations du spectre ultraviolet (*fig.* 2) que pour celles du spectre visible. On remarquera aussi que la courbe relative à T présente, surtout pour les plus fortes longueurs d'onde, un palier plus ou moins marqué suivant la vitesse de formation des couches minces. Ce palier est très marqué pour la radiation de longueur d'onde 6 438 Å et pour une couche formée à la vitesse de 25 mμ à la minute ; T conserve alors la même valeur pour des couches minces d'épaisseurs comprises entre 5 et 12 mμ. Pour les couches formées aux vitesses de 0,8 et 3 mμ à la minute, un léger palier peut encore être observé pour T mais uniquement pour des épaisseurs comprises entre 4 et 5 mμ ; aussi passe-t-il assez souvent inaperçu.

2° COURBES RELATIVES AUX FACTEURS DE RÉFLEXION R ET R'. — Pour toutes les radiations étudiées ici le facteur de réflexion côté air R est d'abord, pour les faibles épaisseurs, d'autant plus grand que la vitesse de formation des couches est plus petite, la variation de R avec cette vitesse reste alors assez faible (0,03 à 0,05). Au delà d'une certaine épaisseur, variable avec la longueur d'onde (24 mμ pour $\lambda = 6\,438$ Å et $\lambda = 4\,046$ Å ; 10 mμ pour $\lambda = 3\,341$ Å et $\lambda = 2\,967$ Å) c'est l'inverse qui se produit. La couche métallique d'or réfléchit d'autant plus qu'elle a été plus rapidement formée ; la variation de R avec la vitesse d'évaporation devient alors très sensible. On trouve, par exemple, pour une même épaisseur de 60 mμ et pour la longueur d'onde 6 438 Å, que R passe de 0,6 à 0,85 lorsque la vitesse passe de 0,8 à 25 mμ à la minute (*fig.* 1). Pour la même épaisseur et les mêmes vitesses d'évaporation R passe de 0,20 à 0,35 pour la radiation de longueur d'onde 2 967 Å (*fig.* 2). On remarquera aussi que, pour $\lambda = 2\,967$ Å, R présente un léger minimum pour une épaisseur voisine de 10 mμ et pour la plus faible vitesse de formation.

Pour les autres radiations on observe soit un palier (pour $\lambda = 3\,341$ Å, *fig.* 3), soit une simple variation de pente, surtout marquée pour les radiations ultraviolettes et pour les vitesses de formation très lentes.

Le minimum du facteur de réflexion côté support R' ainsi que l'épaisseur correspondante de la couche mince varient avec la vitesse de formation (*fig.* 4). Ces variations du minimum de R' restent toujours inférieures à 0,005, c'est dire qu'elles

Nota. — Pour toutes les courbes ci-jointes nous adoptons les conventions suivantes :

———————— pour les couches d'or formées à la vitesse de 0,8 mμ à la minute ;
—.—.—.— pour les couches d'or formées à la vitesse de 3 mμ à la minute ;
. . . . pour les couches d'or formées à la vitesse de 25 mμ à la minute.

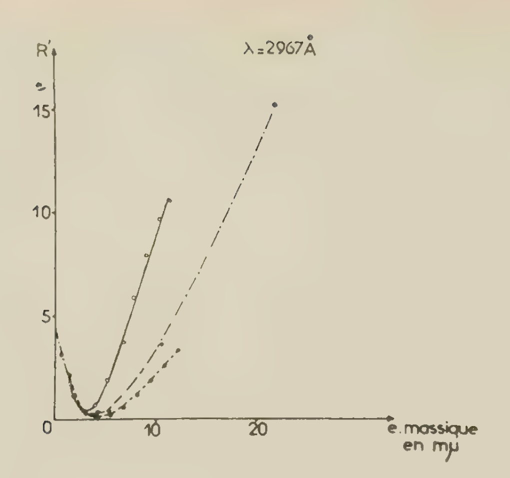


Fig. 4.

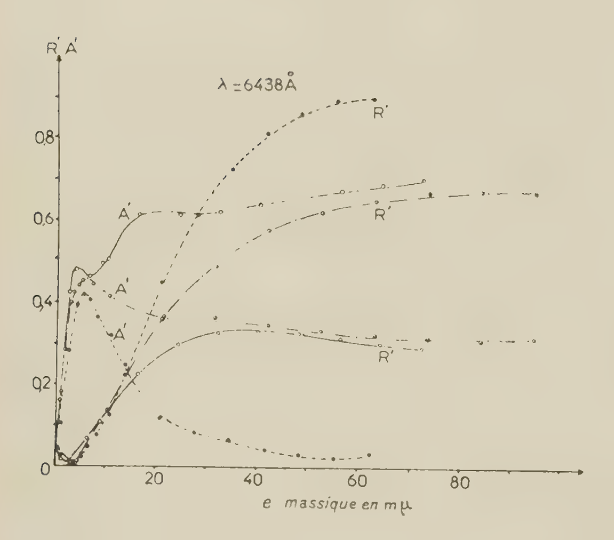


Fig. 5.

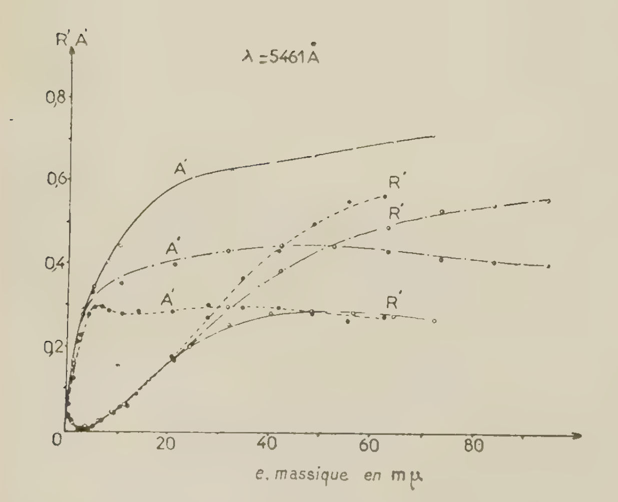


Fig. 6.

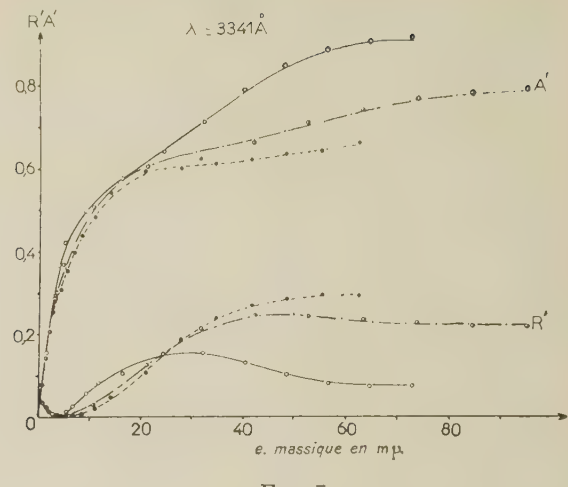


Fig. 7.

Fig. 4, 5, 6 et 7. — Variations du facteur de réflexion côté support R' et du coefficient d'absorption A', en fonction de l'épaisseur massique de la couche mince d'or, pour les 3 vitesses de formation étudiées et pour les 4 longueurs d'onde ; 2 967 Å ; 6 438 Å ; 5 461 Å ; 3 341 Å.

nécessitent pour être mises en évidence, des mesures très précises. Là encore, pour les faibles épaisseurs (inférieures à 10 ou 20 mμ suivant la longueur d'onde), ce sont les couches formées le plus rapidement qui réfléchissent le moins, par contre, pour des épaisseurs supérieures c'est l'inverse qui se produit. La variation de R' peut alors devenir très grande ; c'est ainsi que pour une couche mince d'or de 60 mμ d'épaisseur, et pour $\lambda = 6\,438$ Å, R' passe de 0,31 à 0,90 lorsque la vitesse d'évaporation passe de 0,8 à 25 mμ à la minute (*fig.* 5 et 6).

On remarquera enfin que les facteurs de réflexion R et R' peuvent présenter un maximum d'autant plus net que les couches sont formées plus lentement. On constate en particulier (*fig.* 7) pour la radiation de longueur d'onde 3 341 Å, et pour une vitesse d'évaporation de 0,8 mμ à la minute, qu'une couche d'or de 60 mμ d'épaisseur réfléchit, côté support, la moitié moins ($R' = 0{,}07$) qu'une couche d'or de 30 mμ d'épaisseur ($R' = 0{,}15$).

3° Courbes relatives aux absorptions A et A'. — On constate, pour une épaisseur donnée et pour toutes les longueurs d'onde étudiées, que les absorptions A et A' sont d'autant plus grandes que la vitesse de formation de la couche est plus petite. C'est ainsi que pour une épaisseur de 60 mμ et la radiation 6 438 Å, A passe de 0,07 à 0,39 si la vitesse de formation de la couche passe de 25 mμ à 0,8 mμ à la minute (*fig.* 8). L'absorption A' varie encore davantage puisque dans les mêmes conditions elle passe de 0,025 à 0,67 (*fig.* 5). Cet écart diminue avec la longueur d'onde de la radiation utilisée ; pour la même épaisseur et les mêmes vitesses de formation que précédemment mais pour

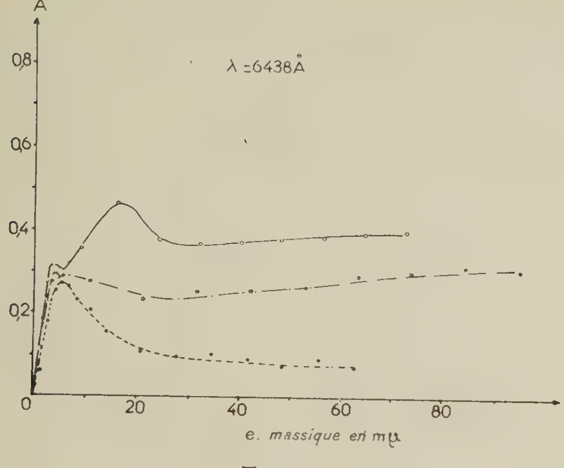


Fig. 8.

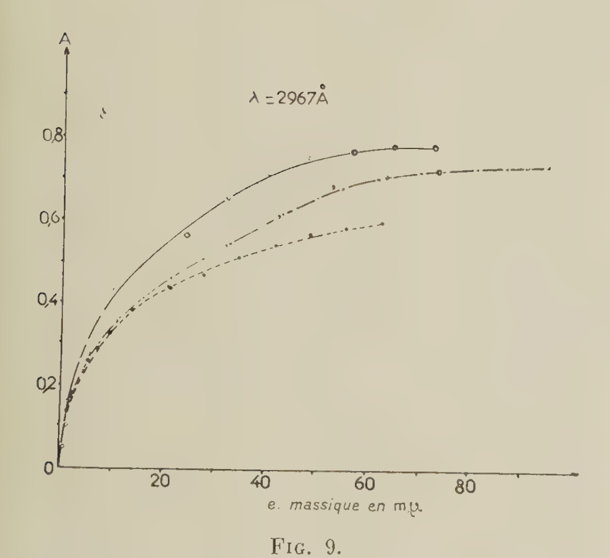


Fig. 9.

Fig. 8 et 9. — Variations du coefficient d'absorption A, en fonction de l'épaisseur massique de la couche mince d'or, pour les 3 vitesses de formations étudiées et pour les 2 longueurs d'onde 6 438 Å ; 2 967 Å.

la longueur d'onde 2 967 Å, A passe de 0,60 à 0,78 (*fig.* 9) tandis que A' passe de 0,68 à 0,91.

On constate de plus que les courbes relatives aux absorptions A et A' ont, pour toutes les longueurs d'onde inférieures à 5 000 Å, sensiblement la même allure générale (*fig.* 7, 9) et ne présentent pas de maximum, quelle que soit la vitesse de formation des couches. Par contre, pour les radiations de longueurs d'onde supérieures à 5 000 Å, ces courbes peuvent avoir des allures totalement différentes ; elles peuvent en effet, suivant la vitesse de formation des couches, présenter ou non un maximum plus ou moins accentué (*fig.* 5 et 8).

B) Les courbes des figures 10 à 14 montrent les variations de T, R, R', A et A' en fonction de la longueur d'onde, pour les 3 vitesses de formation étudiées et pour des épaisseurs de 2 ; 10 ou 60 mμ.

On voit très bien sur ces courbes que, pour une épaisseur donnée, les couches formées à vitesse lente sont toujours les plus absorbantes (*fig.* 13 et 14), tandis que les couches évaporées le plus rapidement ont toujours le plus fort facteur de transmission (*fig.* 10). Par contre, pour les facteurs

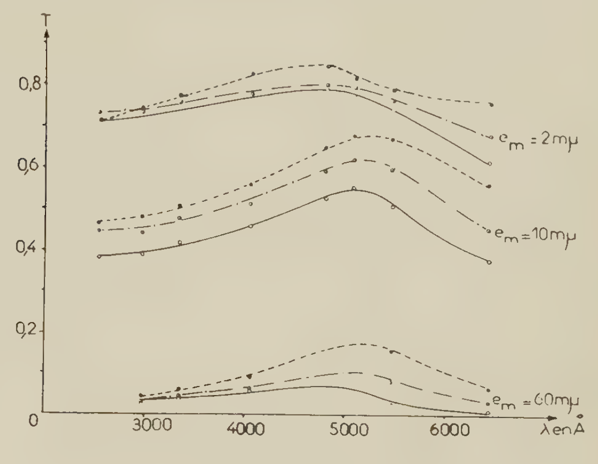


Fig. 10.

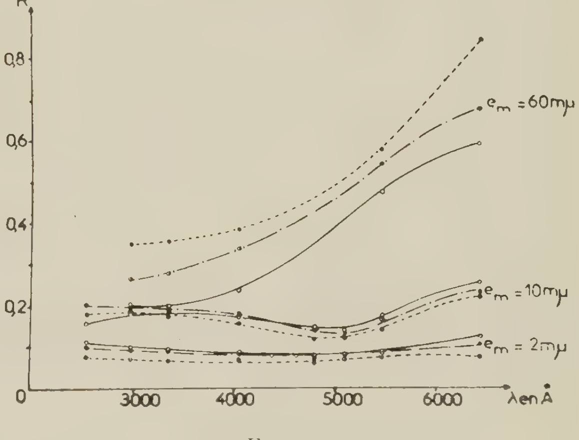


Fig. 11.

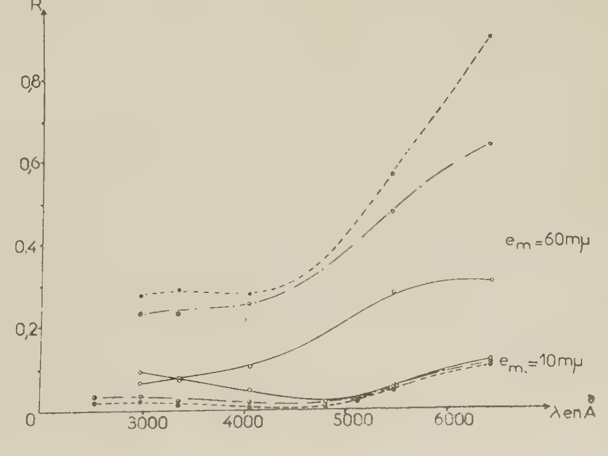


Fig. 12.

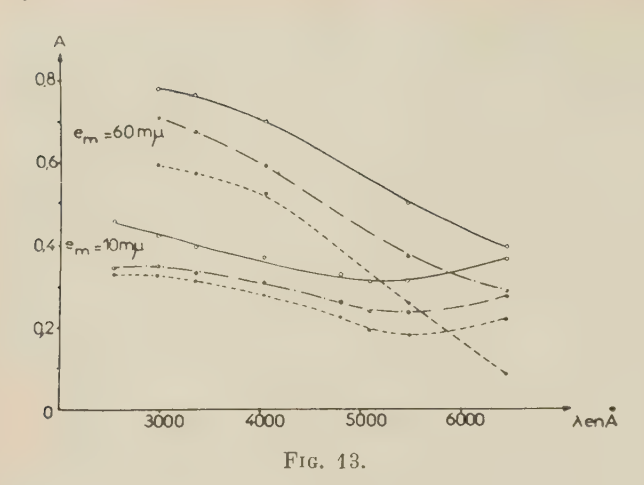


FIG. 13.

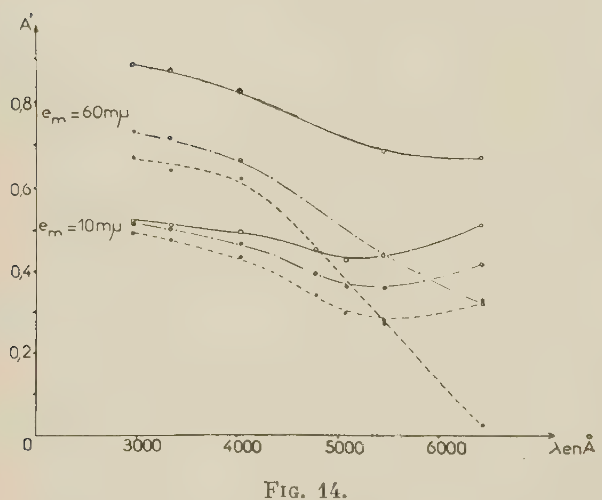


FIG. 14.

FIG. 10 à 14. — Variations de T, R, R', A, A' avec la longueur d'onde pour les 3 vitesses de formation indiquées et pour des couches d'or d'épaisseurs massiques égales à 2 ; 10 ou 60 mμ.

de réflexion R et R' on constate sur ces courbes que pour une épaisseur de 10 mμ ce sont les couches formées lentement qui réfléchissent le plus, tandis que pour une épaisseur de 60 mμ les couches formées lentement sont celles qui réfléchissent le moins (*fig.* 11 et 12).

Les couches minces d'or d'épaisseur 10 mμ présentent un maximum pour T (vers 5 200-5 300 Å) et un minimum pour R et R' (vers 5 000 Å) ainsi que pour A et A' vers 5 200-5 300 Å. Pour des couches d'or de 60 mμ d'épaisseur seul subsiste le maximum de T. La position de ces extrêma varie du reste avec l'épaisseur de la couche considérée.

La relation de Wolter ($nA - A' \simeq 0$) elle-même subit l'influence de la vitesse de formation des couches mais surtout pour les très faibles vitesses. On sait que cette relation est moins bien vérifiée pour les radiations du spectre ultraviolet que pour celles du spectre visible. Nos résultats montrent que, dans le spectre visible, pour des couches d'or formées à la vitesse de 0,8 mμ à la minute, cette relation n'est vérifiée que pour des couches d'épaisseurs inférieures à 5 ou 6 mμ. Par contre, pour des couches d'or formées à la vitesse de 3 ou de 25 mμ à la minute cette relation est vérifiée dans le spectre visible pour des couches d'épaisseurs plus grandes.

Conclusion. — Les propriétés optiques d'une couche métallique d'or d'épaisseur donnée peuvent être très différentes suivant la rapidité avec laquelle la couche a été formée. Bien d'autres facteurs peuvent aussi intervenir, ce qui explique le manque de concordance entre les résultats des divers auteurs et la nécessité pour chaque expérimentateur de préciser les conditions dans lesquelles il a opéré.

Manuscrit reçu le 10 avril 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SENNET (R. C.) et SCOTT (G. D.), *J. Opt. Soc. Amer.*, 1950, **40**, 203.

[2] MALÉ (D.), *Ann. Physique*, 1954, **9**, 10.

[3] TROMPETTE (J.), *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 124.

UNE VERSION MODIFIÉE DE LA THÉORIE DU CHAMP UNIFIÉ D'EINSTEIN

Par JACK LÉVY,
Institut Henri-Poincaré, Paris.

Résumé. — Pour éviter les difficultés auxquelles se heurtent les théories usuelles du champ unifié, nous sommes conduits à introduire dans un lagrangien un terme quadratique par rapport au vecteur de torsion de la connexion affine. Cette introduction est justifiée par les résultats de la théorie de M. H. Eyraud et un schéma hydrodynamique de la théorie des électrons de Dirac.

Abstract — To avoid restrictions and difficulties encountered in classical theories of Einstein's unified field, we are lead to introduce in a Lagrangian formalism, a tensor built as $\Gamma_\mu \Gamma_\nu$ from the torsion vector. Fields equations in two equivalent sets are deduced, and a current is pointed out, able to give non-vanishing equations of motion.

Introduction. — L'unification des champs gravitationnel et électromagnétique peut se concevoir dans le cadre d'une géométrie affine quadridimensionnelle. Sur un réseau curviligne x^μ on attache des repères locaux e_ν en des points infiniment voisins. La connexion de deux tels systèmes de repères fournira le type de géométrisation. Une extension directe de la relativité générale donne la formule de liaison

$$\mathrm{d}e_\mu = \Gamma_{\mu\rho}^{\ \ \nu}\, \mathrm{d}x^\rho\, e_\nu$$

où les $\Gamma_{\mu\rho}^{\ \ \nu}$ sont les coefficients de connexion affine, fonctions à propriétés de symétrie non particularisées.

A partir de cette distribution fondamentale non tensorielle, on peut par des intégrations locales [1] construire des champs tensoriels, courbures, torsion. Muni de cette surstructure, on peut alors former des lagrangiens, en déduire des équations de champs covariantes et compatibles.

Après un bref rappel des théories usuelles et de leurs difficultés, nous proposerons un moyen de remédier à ces dernières. Nous justifierons et préciserons le choix de notre lagrangien par un rapprochement avec deux théories, l'une de M. Eyraud, l'autre de Dirac.

A. Théories usuelles. — 1. LA THÉORIE MIXTE d'Einstein juxtapose un nouveau champ tensoriel défini par le tenseur métrique $g^{\mu\nu}$, aux tenseurs directement construits en géométrie affine. On posera :

$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{|g|}\, g^{\mu\nu}$; g det. de $g_{\mu\nu}$; $R_{\mu\nu}$ tenseur de Ricci.

La comparaison avec la relativité générale suggère alors pour un lagrangien le choix $\mathfrak{L}_0$ ou $\mathfrak{L}'_0$, dont on déduit par variations libres et indépendantes des $g_{\mu\nu}$ et $\Gamma_{\mu\nu}^{\ \ \rho}$ les équations de champ I_0.

$$\mathfrak{L}_0 \equiv \mathfrak{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \qquad \mathfrak{L}'_0 \equiv \mathfrak{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - 2\lambda\sqrt{|g|}$$

$$I_0 \begin{cases} (a) & \mathfrak{g}^{\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu}}{}_{;\,\rho} \equiv \partial_\rho\, \mathfrak{g}^{\mu\nu} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\, \Gamma^{\ \sigma}_{\underline{\rho\sigma}} + \mathfrak{g}^{\mu\sigma}\, \Gamma^{\ \nu}_{\rho\sigma} + \mathfrak{g}^{\sigma\nu}\, \Gamma^{\ \mu}_{\sigma\rho} \\ & \qquad = -\dfrac{2}{3}\, \delta^\nu_\rho\, \mathfrak{g}^{\mu\sigma}\, \Gamma_\sigma + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\, \Gamma_\rho \\ (b) & \partial_\mu\, \mathfrak{g}^{\underset{\smile}{\rho\mu}} = 0 \\ (c) & R_{\mu\nu} = \lambda\, g_{\mu\nu}. \end{cases}$$

La condition arbitraire $\Gamma_\rho \equiv \frac{1}{2}(\Gamma_{\rho\lambda}^{\ \ \lambda} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\ \ \lambda}) = 0$ introduite par Einstein définit un système « fort ». Schrödinger, par l'intermédiaire du changement de connexion $\Gamma_{\mu\nu}^{\ \ \rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\ \ \rho} + \frac{2}{3}\, \delta^\rho_\mu\, \Gamma_\nu$, déduit un système « faible » d'un principe variationnel.

Quoi qu'il en soit, le vecteur de torsion est inaccessible, l'identification des divers tenseurs malaisée et les identités de conservation ne permettent pas de retrouver les lois du mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique. Cette impossibilité est sans doute due ([5] p. 120 et [6]) à l'équation $I_0(b)$ par là trop restrictive.

2. DES COMPLICATIONS du tenseur de Ricci ([5] p. 129 et [7]) permettent de s'en affranchir, mais il semble plus simple, à partir d'une connexion affine très générale, d'évaluer systématiquement les ressources brutes de notre géométrie en tenseurs du second rang.

3. PAR CONTRACTION du tenseur de Riemann

$$R^{\ \ \ \ \rho}_{\mu\nu\sigma}(\Gamma) \equiv \partial_\sigma\, \Gamma_{\mu\nu}^{\ \ \rho} - \partial_\nu\, \Gamma_{\mu\sigma}^{\ \ \rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\ \ \lambda}\, \Gamma_{\lambda\sigma}^{\ \ \rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\ \ \lambda}\, \Gamma_{\lambda\nu}^{\ \ \rho}$$

on obtient :

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\mu\nu\rho} \qquad P_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\rho\mu\nu}. \tag{3}$$

La torsion fournit les tenseurs :

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu \qquad \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu. \tag{3'}$$

En introduisant la notion de connexion transposée $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$, on obtient $R_{\mu\nu}(\tilde{\Gamma})$ et $P_{\mu\nu}(\tilde{\Gamma})$.

On peut alors former une combinaison linéaire de ces divers tenseurs et chercher les équations de champs pour le lagrangien :

$$\mathcal{L} \equiv g^{\mu\nu}[R_{\mu\nu}(\Gamma) + aR_{\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) + bP_{\mu\nu}(\Gamma) + cP_{\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) + d\,\Gamma_\mu \Gamma_\nu].$$

On trouve en particulier [8] une généralisation de $I_0\, b$

$$A\, \partial_\rho\, g^{\underset{\smile}{\rho\alpha}} = 3a\, g^{\mu\nu}\, \Gamma^{\alpha}_{\underset{\smile}{\mu\nu}} + \left[2a\, g^{\alpha\rho} + \frac{3}{2} d(1 + a)\, g^{\underset{\smile}{\rho\alpha}}\right] \Gamma_\rho \tag{4}$$

avec $\qquad A = 4b + c - 1 - a(b + 4c - a).$

On voit alors que sans altérer beaucoup le principe de cette généralisation, on peut en simplifier la forme en supposant b et c quelconques, a en d nuls. Le cas ou $d \neq 0$ semble plus favorable puisque ainsi la notion supplémentaire de transposition n'est pas introduite, et une analogie apparaît avec deux théories : l'une est due a M. H. Eyraud [9] et par la simple introduction du terme $\Gamma_\mu \Gamma_\nu$ dans un hamiltonien du type :

$$\mathfrak{A} = \sqrt{|\alpha\, R_{\underline{\nu\mu}} + \beta(\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu) + \gamma \Gamma_\mu \Gamma_\nu|}$$

permet la définition d'un courant ; l'autre théorie, euclidienne, reconsidère le formalisme électromagnétique classique et aboutit à un schéma hydrodynamique relativiste.

4. La nouvelle théorie classique des électrons de Dirac introduit en effet une condition non linéaire sur les potentiels en remplaçant la conservation $\partial_\rho A^\rho = 0$ par la normalisation $A_\mu A^\mu = k^2$. Partant du lagrangien

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda(A_\mu A^\mu - k^2)$$

on peut alors définir une proportionnalité courant potentiel

$$\partial_\rho F^{\mu\rho} = \lambda A^\mu.$$

Dirac montre qu'un mouvement est possible suivant les équations de Lorentz (k = masse/charge). En effet, soit $\mathring{A}_\mu$ le potentiel en absence de matière chargée ($\lambda = 0$), par la création de charges petites, le potentiel varie peu et reste normalisé :

$$A_\mu = \mathring{A}_\mu + \partial_\mu S \qquad (\mathring{A}_\mu + \partial_\mu S)(\mathring{A}^\mu + \partial^\mu S) = h^2.$$

L'impulsion est égale à :

$$I_\mu = e\, \partial_\mu S. \tag{5}$$

Dans une seconde étape Dirac considère un flux d'électricité à champ continu de vitesse v_μ.

$$v_\mu v^\mu = 1 \tag{6}$$

et remarque que la loi de force de Lorentz peut s'écrire successivement :

$$k \frac{dv^\mu}{ds} = v_\rho F^{\rho\mu} \tag{7}$$

$$\Pi^{\mu\rho} v_\rho = 0 \tag{8}$$

avec

$$\Pi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + k(\partial_\nu v_\mu - \partial_\mu v_\nu) = \partial_\mu I_\nu - \partial_\nu I_\mu \tag{9}$$

$$I_\mu = A_\mu - kv_\mu. \tag{9'}$$

Ces grandeurs peuvent être considérées respectivement comme tenseur tourbillon et vecteur impulsion d'un fluide parfait chargé [14, 15].

Soit alors l'espace vectoriel π à deux dimensions des vecteurs V $\left(\text{tels les vecteurs-vitesse } v_\mu \text{ et tourbillon } \tau^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} v_\beta \pi_{\gamma\delta}\right)$ pour lesquels :

$$\Pi_{\alpha\beta} V^\beta = 0.$$

Ces vecteurs dits de quasi-tourbillon, peuvent être orientés dans le temps, l'espace ou être isotropes. Soit encore un système de couples de fonctions ξ^α et η_α ($a = 1, 2 \ldots$) constantes sur π. On a

$$v^\sigma \partial_\sigma \xi^a = \tau^\sigma \partial_\sigma \eta^a = \ldots = 0. \tag{10}$$

Donc d'après (9) on peut écrire le tenseur tourbillon sous la forme

$$\Pi_{\mu\nu} = (\partial_\mu \xi^a \partial_\nu \eta_a - \partial_\nu \xi^a \partial_\mu \eta_a)$$

et l'impulsion

$$I_\mu = A_\mu - kv_\mu = \xi^a \partial_\mu \eta_a \tag{11}$$

ce qui correspond au mouvement tourbillonnaire du flux d'électricité.

Ces équations sont déductibles d'un lagrangien où ξ, η, v_μ, λ sont variés :

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda(v_\mu v^\mu - 1)$$

le champ $F_{\mu\nu}$ étant fonction de ξ, η d'après (9) et (11).

Ces résultats nous suggèrent l'introduction explicite en théorie unitaire d'une condition de normalisation, en espérant par là, fournir une interprétation physique des potentiels, un schéma hydrodynamique et en précisant ce cadre, la signification des divers tenseurs.

B. La condition de normalisation en théorie unitaire. — 1. Équations des champs. — Nous

adopterons l'expression suivante du lagrangien (1).

$$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{g}^{\mu\nu}[R_{\mu\nu}(\Gamma) + m(S_{\mu,\nu} - S_{\nu,\mu})] + 2\mathfrak{A}^{\mu}(\Gamma_{\mu} - k_{\mu}) + a(\mathfrak{g}^{\mu\nu} S_{\mu} S_{\nu} - 2\sqrt{|g|}\,\alpha^2).$$

En effet, en jouant sur le terme $\mathfrak{A}^{\mu}(\Gamma_{\mu} - k_{\mu})$ nous pourrons faire porter la condition de normalisation sur un vecteur quelconque S_{μ} et non plus nécessairement sur le vecteur de torsion Γ_{μ} ; ceci afin d'éviter toute identification ou interprétation anticipée des champs. Le terme en a impose la normalisation. Nous verrons par la suite la nécessité du terme en m ; $R_{\mu\nu}$ provient de l'extension directe de la relativité générale. Précisons les notations :

$R_{\mu\nu}(\Gamma)$ tenseur de Ricci de la connexion quelconque $\Gamma^{\alpha}_{\eta\gamma}$;

$W_{\mu\nu}(L)$ qui est, lui, construit sur la connexion $L^{\alpha}_{\eta\lambda}$ à vecteur de torsion nul ;

$\mathfrak{A}^{\mu} = \sqrt{|g|}\,A^{\mu}$, a scalaire, multiplicateurs de Lagrange ;

k_{μ} vecteur susceptible d'être fonction de S_{μ}.

Les variations portent sur $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, $\Gamma^{\alpha}_{\eta\gamma}$, S_{μ}, $\mathfrak{A}^{\mu}$, a, et donnent les systèmes d'équations :

$$\text{I} \quad \mathfrak{g}^{\overset{\beta\gamma}{+-}}{}_{;\,\alpha} = \mathfrak{g}^{\beta\gamma}\,\Gamma_{\alpha} - \frac{2}{3}\,\delta^{\gamma}_{\alpha}\,\mathfrak{g}^{\beta\rho}\,\Gamma_{\rho} - \delta^{\beta}_{\alpha}\,\mathfrak{A}^{\gamma}$$

$$\text{I}_a \quad \partial_{\rho}\,\mathfrak{g}^{\beta\rho} + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\,\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\,\mathfrak{g}^{\beta\rho}\,\Gamma_{\rho} + \mathfrak{A}^{\beta} = 0$$

$$\text{I}_b \quad \partial_{\rho}\,\mathfrak{g}^{\underset{\smile}{\gamma\rho}} = \frac{3}{2}\,\mathfrak{A}^{\gamma}$$

$$\text{II} \quad R_{\mu\nu} + m(S_{\mu,\nu} - S_{\nu,\mu}) + aS_{\mu}\,S_{\nu} = a\,\alpha^2\,g_{\mu\nu}$$

$$\text{III} \quad a\,\mathfrak{g}^{\underline{\alpha\rho}}\,S_{\rho} = \partial_{\sigma}\,\mathfrak{g}^{\underset{\smile}{\rho\sigma}}\left(\frac{2}{3}\frac{\partial k_{\rho}}{\partial S_{\alpha}} + m\,\delta^{\alpha}_{\rho}\right)$$

$$\text{IV} \quad k_{\mu} = \Gamma_{\mu}$$

$$\text{V} \quad \mathfrak{g}^{\mu\nu}\,S_{\mu}\,S_{\nu} = 2\sqrt{|g|}\,\alpha^2.$$

On voit alors le caractère nécessaire de l'ensemble des champs auxiliaires $\mathfrak{A}^{\mu}$, a, m, α. Le vecteur $\mathfrak{A}^{\mu}$ par I_b dote la théorie d'un « courant » dont nous connaissons la nécessité dans la détermination du mouvement des particules. D'où l'exigence d'après la signification de $\mathfrak{A}_{\mu}$ dans (1) d'une condition sur le vecteur de torsion, puisque l'existence de $\mathfrak{A}_{\mu}$ entraîne l'équation IV. Cette condition est ici explicitée par a et k_{μ} en une normalisation. L'examen des équations I à V montre d'autre part que :

— $\mathfrak{A}^{\mu}$ étant nécessairement différent de zéro pour s'affranchir de I_{ab}.

— Si $a = 0$, III et I_b conduisent à

$$\partial_{\sigma}\,\mathfrak{g}^{\underset{\smile}{\rho\sigma}}\left(\frac{2}{3}\frac{\partial k_{\rho}}{\partial S_{\alpha}}\right) + \partial_{\sigma}(m\,\mathfrak{g}^{\underset{\smile}{\alpha\sigma}}) = 0$$

$$\frac{2}{3}\frac{\partial k_{\rho}}{\partial S_{\alpha}} + m\,\delta^{\alpha}_{\rho}\,\partial_{\sigma}\,\mathfrak{g}^{\underset{\smile}{\rho\sigma}} + \mathfrak{g}^{\underset{\smile}{\alpha\sigma}}\,\partial_{\sigma}\,m = 0$$

(1) Pour ce choix et le détail des calculs voir [8].

c'est-à-dire à I_{ab} avec les hypothèses que nous serons rapidement amenés à faire sur k_{μ} et m.

— Si $m = 0$ on doit avoir $k_{\mu} \neq 0$ ce qui élimine de la théorie la possibilité de retrouver un système faible à vecteur de torsion nul.

Nous allons maintenant supposer successivement k_{μ} nul et k_{μ} identique à kS_{μ} Il vient les deux systèmes.

$$A \left\{ \begin{array}{ll} \text{I} & D_{\alpha}\,\mathfrak{g}^{\overset{\beta\gamma}{+-}} = -\dfrac{2}{3}\dfrac{a}{m}\,\delta^{\beta}_{\alpha}\,\mathfrak{g}^{\underline{\gamma\rho}}\,S_{\rho} \\ \text{I}_a,\ \text{III} & \partial_{\rho}(m\,\mathfrak{g}^{\underset{\smile}{\alpha\rho}}) = a\,\mathfrak{g}^{\underline{\alpha\rho}}\,S_{\rho} \\ \text{I}_b & \partial_{\rho}\,\mathfrak{g}^{\beta\rho} + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\,L^{\beta}_{\mu\nu} + \dfrac{2}{3}\,\partial_{\rho}\,\mathfrak{g}^{\underset{\smile}{\beta\rho}} = 0 \\ \text{II} & W_{\mu\nu}(L) + m(S_{\mu,\nu} - S_{\nu,\mu}) + aS_{\mu}\,S_{\nu} = a\alpha^2\,g_{\mu\nu} \\ \text{IV} & L_{\rho} = 0 \\ \text{V} & \mathfrak{g}^{\mu\nu}\,S_{\mu}\,S_{\nu} = 2\alpha^2\sqrt{|g|}. \end{array} \right.$$

Ce système A sera dit faible ($L_{\mu} = 0$). Le vecteur de torsion a disparu, la géométrie n'est plus générale, mais on a dû introduire pour remédier à cette restriction, un vecteur S_{α}. Introduction phénoménologique à rapprocher de celle du tenseur $g_{\mu\nu}$.

Le système B homogène voit l'élimination de $\mathfrak{A}^{\mu}$ et S_{μ}, et s'écrit dans la connexion générale $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$:

$$\text{I} \quad \mathfrak{g}^{\overset{\beta\gamma}{+-}}{}_{;\,\alpha} = \mathfrak{g}^{\beta\gamma}\,\Gamma_{\alpha} - \frac{2}{3}\,\delta^{\gamma}_{\alpha}\,\mathfrak{g}^{\beta\rho}\,\Gamma_{\rho} - \frac{2}{3}\,\frac{a/k}{m + (2k/3)}\,\delta^{\rho}_{\alpha}\,\mathfrak{g}^{\underline{\gamma\rho}}\,\Gamma_{\rho}$$

$$\text{I}_a \quad \partial_{\rho}\,\mathfrak{g}^{\underset{\smile}{\alpha\rho}} = \frac{a/k}{m + 2k/3)}\,\mathfrak{g}^{\underline{\alpha\rho}}\,\Gamma_{\rho}$$

$$\text{I}_b \quad \partial_{\rho}\,\mathfrak{g}^{\beta\rho} + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\,\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\,\mathfrak{g}^{\beta\rho}\,\Gamma_{\rho} + \frac{2}{3}\,\partial\ \ \mathfrak{g}^{\underset{\smile}{\beta\rho}} = 0$$

$$\text{II} \quad R_{\mu\nu}(\Gamma) + mk(\Gamma_{\mu,\nu} - \Gamma_{\nu,\mu}) + ak^2\,\Gamma_{\mu}\,\Gamma_{\nu} = a\,\alpha^2\,g_{\mu\nu}$$

$$\text{III} \quad \mathfrak{g}^{\mu\nu}\,\Gamma_{\mu}\,\Gamma_{\nu} = 2\alpha^2/k^2.\sqrt{|g|}.$$

Remarquons les valeurs interdites pour m :

$$m_A \neq 0 \quad \text{et} \quad m_B \neq -\frac{2k}{3}.$$

2. Équivalence des systèmes. — Le système B absorbe le champ S_{μ} dans le schéma de connexion affine qui supporte alors la condition de normalisation. C'est donc un système plus unifié que A qui comporte en plus un vecteur S_{α} ; mais en apparence seulement car nous allons montrer que ces deux systèmes sont transformés l'un de l'autre par une opération sur la connexion affine, opération qui n'affecte pas l'équation des géodésiques.

Soit en effet un λ-transformation définie [3, 4] par un vecteur λ_h :

$$\Gamma^{*\,i}_{jh} = \Gamma^{i}_{jh} + \delta^{i}_{j}\,\lambda_h.$$

Elle laisse bien invariantes [2, 3, 4] les équations géodésiques telles qu'Eisenhart les a données [16].

On peut d'ailleurs rapprocher ces transformations des déformations introduites par M. Eyraud [9].

Soit alors $S^{\alpha}_{\mu\gamma}$, S_{α} une connexion et son vecteur de torsion. Posons :

$$L^{\alpha}_{\beta\gamma} = S^{\alpha}_{\beta\gamma} + \delta^{\gamma}_{\beta} A_{\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma} B_{\beta}.$$

Portons dans l'équation I du système A, on retrouve I de B, à condition de poser [8] :

$$A_{\alpha} = \frac{2}{3} S_{\alpha} \qquad B_{\alpha} = 0 \qquad m_A = k\left(m_B + \frac{2k}{3}\right)$$

On retrouve II_B avec

$$m_B\, k = m_A - \frac{2}{3}.$$

Ce qui nous conduit à prendre $k^2 = 1$ et

$$m_A \pm m_B = \frac{2}{3}.$$

Les systèmes A et B sont donc mathématiquement et physiquement équivalents, en ce sens qu'une transformation conservant le parallélisme échange les équations de champs déduites de

$$\mathfrak{L}_A = \mathfrak{g}^{\mu\nu}[W_{\mu\nu}(\Gamma) + m_A(S_{\mu,\nu} - S_{\nu,\mu})] + 2\mathfrak{A}^{\mu} L_{\mu} + a(\mathfrak{g}^{\mu\nu} S_{\mu} S_{\nu} - 2\sqrt{|g|}\, \alpha^2)$$

et celles données par :

$$\mathfrak{L}_B = \mathfrak{g}^{\mu\nu}[R_{\mu\nu}(\Gamma) + m_B(\Gamma_{\mu,\nu} - \Gamma_{\nu,\mu})] + a(\mathfrak{g}^{\mu\nu} \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} - 2\sqrt{|g|}\, \alpha^2).$$

L'un des systèmes, A, est dégénéré de l'autre B par un choix de « jauge » convenable.

Ainsi nous avons levé une restriction de la théorie du champ unifié en douant l'équation en divergence d'un second membre non nul par l'introduction dans le lagrangien du tenseur $\Gamma_{\mu}\, \Gamma_{\nu}$ sous forme d'une normalisation.

Manuscrit reçu le 5 mai 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Cartan, *Ann. Ec. Normale*, 1923, **40**.
[2] Einstein, The meaning of Relativity, App. 1950-1953.
[3] Einstein dans Louis de Broglie Physicien et Penseur, Albin Michel, 1953.
[4] Winogradzky (J.), Séminaire Théories Physiques n° 10. Inst. H. Poincaré, 18 janvier 1955.
[5] Tonnelat (M. A.), La théorie du champ unifié d'Einstein, Gauthier-Villars, 1955.
[6] Tonnelat (M. A.), *Nuovo Cimento*, 1953, **10**, 1611.
[7] Tonnelat (M. A.), *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 81 ; 1952, **13**, p. 177.
[8] Lévy (J.), *Thèse* 3e cycle, 1957.
[9] Eyraud (H.), *Thèse*, Blanchard, 1926.
[10] Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, 1951, **209** A, 211 ; 1952, **212**, 330 ; 1954, **233** A, 438.
[11] Schrödinger, *Nature*, 1952, **169**, 538.
[12] Banesh Hoffmann, *Phys. Rev.*, 1953, **89**, 52.
[13] Stephenson, *Nuovo Cimento*, **10**, 1611.
[14] Synce, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1937, **43**, 376.
[15] Lichnerowitz, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Masson, 1955.
[16] Eisenhart, *Ann. Math. Soc.*, 1927.
[17] Mavrides, *C. R. Acad. Sc.*, **238**, 1566-1642 ; 1954, **239**, 637.
[18] Phan Tan Hoang, *C. R. Acad. Sc.*, **243**, 1600 ; 1955, **241**, 1919.
[19] Costa de Beauregard (O.), La théorie de la relativité restreinte, Masson.

ÉTUDE DES TRANSITIONS ENTRE ÉTATS MÉTALLIQUES ET ISOLANTS. APPLICATION AUX BANDES D'IMPURETÉ ET AUX ANTIFERROMAGNÉTIQUES. II.

Par J. DES CLOIZEAUX,

École Normale Supérieure, Laboratoire de Physique.

Résumé. — Dans certaines conditions un gaz d'électrons en mouvement dans un solide peut présenter un caractère isolant en contradiction avec les prévisions de la théorie des bandes. Un modèle simple a été proposé précédemment. Une étude plus précise corrobore les résultats obtenus et montre qu'à côté des excitations individuelles, il existe deux types d'excitations collectives, les plasmons et les spinons. L'application du modèle aux systèmes désordonnés est particulièrement discutée.

Abstract. — Under definite assumptions, an electron gas in a solid may behave as an insulator, in contradiction to the predictions of band theory. A simple model has been proposed previously. A more careful study gives the same results but shows that besides individual excitations there are two kinds of collective excitations : plasmons and spinons. An application of the model to disordered systems is discussed.

VII

EXCITATIONS INDIVIDUELLES ET EXCITATIONS COLLECTIVES. THÉORIE PLUS COMPLÈTE.

1. **Généralités.** — Jusqu'ici [28] nous avons négligé délibérément dans l'hamiltonien H, tous les termes non diagonaux par rapport aux états A_k^α, B_k^α, A_k^β et B_k^β. Examinons mintenant les modifications qui sont introduites dans notre modèle, quand on veut tenir compte de ces termes. L'état de base alors n'est plus F_1 mais un état légèrement modifié F_2.

Or, au paragraphe III-7, nous avons dressé la liste des opérateurs S_{uk}^+ et S_{uk} associés aux excitations possibles de l'état de base F_1 de l'hamiltonien diagonal. Il est alors facile de voir que, si l'on veut pousser l'approximation d'un cran plus loin, il faudra extraire de l'hamiltonien non diagonal H_{ND} les termes linéaires ou bilinéaires par rapport aux opérateurs S_{uk}^+ et S_{uk} ; soit H_{NDU} cette fraction utile de l'hamiltonien. Le problème consiste alors à calculer les énergies et les excitations d'un système dont l'hamiltonien est maintenant :

$$H_U = H_D + H_{NDU}.$$

Ce problème a été résolu par Sawada et Sawada, Brueckner, Fukuda et Brout [4] pour un gaz d'électrons libres au zéro absolu (en ne tenant compte que des excitations qui conservent le spin, et sont seules importantes aux fortes densités).

La méthode utilisée par ces auteurs permet à la fois d'évaluer l'énergie de corrélation de l'état de base et d'étudier la nature des excitations élémentaires du système. En particulier, ce traitement rend compte de l'existence d'excitations de caractère collectif ou individuel, et permet de calculer les énergies d'excitation.

Notre problème peut être résolu de façon analogue, bien qu'il soit un peu plus général. En effet à côté des excitations qui conservent le spin et qui conduisent à des excitations collectives du type plasmon, nous introduisons des excitations qui renversent le spin et conduisent, comme nous le verrons, à des excitations collectives du type spinon. Par ailleurs, pour étudier les diverses excitations du système, nous nous placerons à la température T, cette hypothèse n'introduisant pas de difficultés supplémentaires et ne changeant rien au formalisme utilisé.

Le but de ce calcul n'est pas d'évaluer l'énergie de corrélation. En effet, dans notre modèle, il y a séparation plus ou moins effective des électrons de spins opposés sur deux sous-réseaux ; l'énergie de corrélation a donc déjà été en grande partie absorbée dans les termes qui proviennent de l'hamiltonien diagonal. Comme nous le verrons, tout se passe comme si notre transformation antiferromagnétique avait écranté le potentiel répulsif entre électrons. Par ailleurs, l'énergie de corrélation peut être évaluée par un simple calcul de perturbation au deuxième ordre, l'existence d'une énergie d'activation e_0 assurant de toutes façons la convergence de ce calcul. Remarquons que, pour un gaz d'électrons libres, il n'en est pas de même, le calcul de perturbation du deuxième ordre diverge, et c'est justement cette divergence qui oblige à avoir recours à des procédés plus raffinés.

En ce qui concerne notre modèle, l'intérêt de la méthode réside plutôt dans l'étude des excitations. Il est, en effet, important de montrer que l'intro-

duction de termes non diagonaux dans notre hamiltonien, ne détruit pas le caractère isolant du système. Les conclusions de cette étude sont alors les suivantes :

a) Toutes les excitations correspondant au vecteur d'onde $\boldsymbol{q}$, sont divisées en deux groupes distincts, les excitations longitudinales qui conservent les spins et les excitations transversales qui les renversent.

b) Les excitations longitudinales associées au vecteur d'onde $\boldsymbol{q}$ comportent un grand nombre d'excitations individuelles $\left(\frac{N}{2} - 1\right)$ et une excitation collective ou plasmon. Les énergies associées aux excitations individuelles de l'hamiltonien non diagonal sont sensiblement les mêmes que les énergies d'excitation correspondantes de l'hamiltonien diagonal (le déplacement énergétique est de l'ordre $1/N$).

Le plasmon, quand il n'est pas absorbé dans le fond continu des excitations individuelles, possède une énergie nettement supérieure à celle de toutes les excitations individuelles.

c) Les excitations transversales de vecteur d'onde $\boldsymbol{q}$ comportent de même un grand nombre d'excitations individuelles $\left(\frac{N}{2} - 1\right)$ et une excitation collective ou spinon. Les énergies associées aux excitations individuelles de l'hamiltonien non diagonal sont encore sensiblement les mêmes que les énergies d'excitation correspondantes de l'hamiltonien diagonal (le déplacement énergétique est de l'ordre $1/N$).

Le spinon, quand il existe, possède une énergie inférieure à celle de toutes les excitations individuelles. Si $|\boldsymbol{q}| \to 0$, l'énergie du spinon tend vers zéro.

En résumé, pour toutes les excitations individuelles, il existe une énergie d'excitation e_0. Seules les excitations du type spinon sont associées à des énergies faibles. Toutefois, ces spinons ne semblent pas susceptibles de transporter du courant ; d'ailleurs, statistiquement, le nombre d'excitations du type spinon est infiniment petit par rapport aux autres types d'excitations. Notre système est donc isolant.

Ajoutons une dernière remarque au sujet des spinons ; comme nous l'avons vu, les termes d'interaction proprement magnétique entre les ions voisins ont été négligés. Dans un véritable antiferromagnétique au zéro absolu, l'énergie réelle des spinons serait donc assez différente de celle que nous calculerons dans la suite de notre exposé ; cependant la structure des excitations resterait de toute façon inchangée.

Notre but étant défini, les pages qui vont suivre, seront consacrées aux développements mathématiques qui justifient nos assertions.

2. **Excitations longitudinales et transversales de l'hamiltonien diagonal. Relations de commutation.** — Tant que l'on ne tient compte que de la partie diagonale H_D de l'hamiltonien, les excitations élémentaires gardent une forme simple, et le tableau des opérateurs S_{uk}^+ et S_{uk} associés à la création ou à l'annihilation de ces excitations, a été dressé au paragraphe III-7.

La question se complique quand on étudie le système régi par l'hamiltonien $H = H_D + H_{NDU}$. En effet, l'opérateur H_{NDU} introduit des couplages entre les différents opérateurs S_{uk}^+ et S_{uk}. En première approximation, il est légitime de considérer les opérateurs de création et d'annihilation des excitations de l'hamiltonien H comme des combinaisons linéaires et homogènes des opérateurs S_{uk}^+ et S_{ku}.

Avant tout, nous devons un peu préciser les propriétés de ces opérateurs. Ils appartiennent à deux groupes :

a) Opérateurs longitudinaux. — Ils sont de la forme $A_k^{+\varepsilon} \tilde{B}_k^{\varepsilon}$ ou $\tilde{B}_k^{+\varepsilon} A_k^{\varepsilon}$. Nous poserons :

$$l_{k,k+q}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\lambda(\mathbf{k}+\mathbf{q})} \tilde{B}_{k+q}^{+\alpha} A_k^{\alpha} + e^{i\lambda\mathbf{k}} A_{k+q}^{+\beta} \tilde{B}_k^{\beta}\right] \tag{57}$$

$$l_{k,k+q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\lambda(\mathbf{k}+\mathbf{q})} A_k^{+\alpha} \tilde{B}_{k+q}^{\alpha} + e^{-i\lambda\mathbf{k}} \tilde{B}_k^{+\beta} A_{k+q}^{\beta}\right].$$

Ainsi pouvant être définis tous les opérateurs longitudinaux et de manière unique, à condition toutefois que $\boldsymbol{k}$ soit un vecteur de la zone réduite, tandis que le vecteur $\boldsymbol{q}$ peut varier dans toute l'étendue de la zon e de Brillouin.

Les relations de commutation de ces opérateurs sont alors faciles à calculer, à condition de les évaluer en valeur moyenne pour un système à la température T.

Avec les conditions $k \in (DZ_1)$ et $q \in (ZB)$, nous obtiendrons les relations approchées :

$$[l_{k,k+q}^+, l_{u,u+s}^+] = 0 \qquad [l_{k,k+q}, l_{u,u+s}] = 0$$

$$[l_{k,k+s}, l_{u,u+s}^+] = \delta_{ku}\, \delta_{qs}[f_k - g_{k+q}]. \tag{58}$$

Les probabilités d'occupation des niveaux $f_K(T)$ et $g_K(T)$ ont été définies au chapitre IV-1.

b) Opérateurs transversaux. — Ils sont de la forme $A_k^{+\varepsilon'} A_k^{\varepsilon}$ ou $\tilde{B}_k^{+\varepsilon'} \tilde{B}_k^{\varepsilon}$ (ε et ε' représentant des états de spins opposés).

Nous poserons :

$$\left| \begin{array}{l} t_{k,k+q}^+ = A_{k+q}^{+\beta} A_k^{\alpha} \\ t_{k,k+q} = A_k^{+\alpha} A_{k+q}^{\beta} \end{array} \right| \begin{array}{l} t'_{k+q,k} = e^{-i\lambda\mathbf{q}} \tilde{B}_{k+q}^{+\beta} \tilde{B}_k^{\alpha} \\ t'^{+}_{k+q,k} = e^{i\lambda\mathbf{q}} \tilde{B}_k^{+\alpha} \tilde{B}_{k+q}^{\beta}. \end{array} \tag{59}$$

Ces opérateurs sont définis de manière unique à condition que les vecteurs $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{q}$ appartiennent à la zone de Brillouin réduite (DZ_1).

Les commutateurs de ces opérateurs sont très faciles à calculer et nous pourrons encore les exprimer en valeur moyenne à la température T.

Avec les conditions $\boldsymbol{k} \in (DZ_1)$ et $\boldsymbol{q} \in (DZ_1)$, nous obtiendrons les relations approchées :

$$[t^{+}_{k,k+q}, t^{+}_{u,u+s}] = 0 \qquad [t_{k,k+q}, t_{u,u+s}] = 0$$
$$[t_{k,k+q}, t^{+}_{u,u+s}] = \delta_{ku}\, \delta_{qs} [f_k - g_{k+q}]$$
$$[t'^{+}_{k,k+q}, t'^{+}_{u,u+s}] = 0 \qquad [t'_{k,k+q}, t'_{u,u+s}] = 0 \tag{60}$$
$$[t'_{k,k+q}, t'^{+}_{u,u+s}] = \delta_{ku}\, \delta_{qs} [f_k - g_{k+q}].$$

Par ailleurs, considérons les trois groupes d'opérateurs t et t^+, t' et t'^+, l et l^+. Tous les commutateurs formés à partir de deux opérateurs appartenant à deux groupes différents sont nuls en valeur moyenne.

Toutes ces relations nous servirent dans la suite, et déjà nous remarquons que les relations de commutation n'introduisent pas de couplage entre opérateurs longitudinaux et transversaux. De même, nous verrons que dans l'hamiltonien, les termes longitudinaux et les termes transversaux peuvent, en un certain sens, être séparés. En conséquence, dans le système régi par l'hamiltonien

$$H = H_D + H_{NDU},$$

il existera encore des excitations longitudinales et transversales représentées respectivement par les symboles (L) et (T).

L'opérateur L associé à une excitation longitudinale et fonction linéaire des opérateurs l^+ et l sera choisi de telle façon que :

$$[H, L] = E_L\, L. \tag{61}$$

De même, l'opérateur T associé à une excitation transversale et fonction linéaire des opérateurs t^+ et t' ou t'^+ et t sera choisi de telle façon que

$$[H, T] = E_T\, T. \tag{62}$$

Dans ces égalités, E_L et E_T représentent les énergies correspondant à la création ou à l'annihilation d'une excitation.

3. Calcul de l'hamiltonien non diagonal utile H_{NDU}.— Examinons maintenant la partie non diagonale de l'hamiltonien H et voyons quels termes nous devons retenir. Le critère est le suivant : un terme est utile si son commutateur avec l'un des opérateurs S^{+}_{uk} ou S_{uk} redonne approximativement un terme analogue.

Il est facile de voir alors que, de l'hamiltonien de Bloch H_{BND} (voir formule (7)), on ne peut retenir aucun terme intéressant. Tous les termes utiles proviennent de l'hamiltonien d'interaction H_I qu'on peut exprimer sous la forme suivante (voir formule (17)) :

$$H_I = \frac{1}{2N} \Sigma\, g(q) \tag{63}$$
$$[\cos \Phi^{\varepsilon}_{k+q} A^{+\varepsilon}_{k,q} - \sin \Phi^{\varepsilon}_{k+q}\, e^{-i\lambda(\mathbf{k}+\mathbf{q})}\, \tilde{B}^{+\varepsilon}_{k+q}]$$
$$[\cos \Phi^{\eta}_{u-q} A^{+\eta}_{u-q} - \sin \Phi^{\eta}_{u-q}\, e^{-i\lambda(\mathbf{u}-\mathbf{q})}\, B^{+\eta}_{u-q}]$$
$$[\cos \Phi^{\eta}_{u} A^{\eta}_{u} - \sin \Phi^{\eta}_{u}\, e^{i\lambda \mathbf{u}}\, B^{\eta}_{u}][\cos \Phi^{\varepsilon}_{k} A^{\varepsilon}_{k} - \sin \Phi^{\varepsilon}_{k}\, e^{i\lambda \mathbf{k}}\, B^{\varepsilon}_{k}].$$

Vu la forme des excitations longitudinales et transversales, il est clair que nous pouvons extraire de H_I deux hamiltoniens H_{INDL} et H_{INDT} : H_{INDL} est bilinéaire par rapport aux excitations longitudinales et H_{INDT} bilinéaire par rapport aux excitations transversales.

Tous les termes de l'hamiltonien utile H_{NDU} appartiennent soit à l'hamiltonien H_{INDL} soit à l'hamiltonien H_{INDT}, mais certains termes de H_{NDU} figurent à la fois dans H_{INDL} et H_{INDT}, et par conséquent :

$$H_{NDU} \neq H_{INDL} + H_{INDT}.$$

Il n'y a pas de termes de couplage entre excitations longitudinales et excitations transversales ; par ailleurs, les opérateurs associés à ces excitations commutent. En conséquence, les excitations longitudinales et transversales seront tout à fait séparées, ce que l'on pouvait d'ailleurs prévoir *a priori*, puisque la composante σ_z du spin total commute avec l'hamiltonien transformé.

Si donc nous nous intéressons aux excitations longitudinales, nous pouvons toujours poser :

$$H \simeq H_D + H_{NDU} \simeq H_D + H_{INDL}. \tag{64}$$

Si, au contraire, nous nous intéressons aux excitations transversales, nous aurons :

$$H \simeq H_D + H_{NDU} \simeq H_D + H_{INDT}. \tag{65}$$

Nous allons maintenant préciser la forme de ces opérateurs.

La forme de l'hamiltonien transversal H_{INDT} est relativement simple et présente un caractère d'échange. Nous remplacerons donc partout $g(u - k)$ par sa valeur moyenne g, comme nous l'avons fait dans le calcul de l'hamiltonien diagonal. En changeant $\boldsymbol{k}$ en $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{u}$ en $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ en $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}$, nous pouvons réduire les termes semblables.

On en tire alors immédiatement :

$$H_{INDT} = -\frac{g}{N} \Sigma' \sin (\Phi_{k+q} + \Phi_k) [t^{+}_{k,k+q} + t'_{k+q,k}]$$
$$\sin (\Phi_{u+q} + \Phi_u) [t'^{+}_{u,u+q} + t_{u+q,u}]$$
$$+ \frac{g}{N} \Sigma' \cos (\Phi_{k+q} - \Phi_k) [t^{+}_{k,k+q} - t'_{k+q,k}]$$
$$\cos (\Phi_{u+q} - \Phi_u) [t^{+}_{u,u+q} - t_{u+q,u}]$$

avec les conditions $\boldsymbol{k} \varepsilon (DZ_1)$, $\boldsymbol{u} \varepsilon (DZ_1)$ et $\boldsymbol{q} \varepsilon (DZ_1)$, les termes diagonaux étant exclus.

L'hamiltonien longitudinal H_{INDL} comprend deux termes, un terme coulombien H_{INDLC} et un terme d'échange H_{INDLE} (seul le terme coulombien est pris en considération par Gell-Mann et Brueckner dans leur théorie des électrons libres, parce qu'il est seul important pour de fortes densités).

Posons $\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}$, et dans les hamiltoniens

H_{INDLC} et H_{INDLE} réduisons les termes semblables. Écrivons alors ces expressions sous une forme compacte, en étendant le domaine de variation du vecteur q à toute la zone de Brillouin (le symbole Σ'' sera utilisé pour dénoter ce type de sommation).

$$H_{INDLC} = \frac{1}{N} \Sigma'' g(q) \sin(\Phi_{k+q} - \Phi_k) [l^+_{k,k+q} - l_{k+q,k}] \sin(\Phi_{u+q} - \Phi_u) [l_{u,u+q} - l^+_{u+q,u}]$$

$$H_{INDLE} = -\frac{g}{2N} \Sigma'' \sin(\Phi_{k+q} - \Phi_k) [l^+_{k,k+q} - l_{k+q,k}] \sin(\Phi_{u+q} - \Phi_u) [l_{u,u+q} - l^+_{u+q,u}] - \frac{g}{2N} \Sigma'' \cos(\Phi_{k+q} + \Phi_k) [l^+_{k,k+q} + l_{k+q,k}] \cos(\Phi_{u+q} + \Phi_u) [l_{u,u+q} + l^+_{u+q,u}] \quad (67)$$

avec les conditions $k \epsilon (DZ_1)$, $u \epsilon (DZ_1)$ et $q \epsilon (ZB)$, les termes diagonaux étant exclus.

Finalement on obtient :

$$H_{INDL} = H_{INDLC} + H_{INDLE} \quad (68)$$

4. **Excitations transversales. Théorie plus complète.** — Examinons maintenant la forme exacte des excitations transversales (avec renversement de spin). La composante σ_z du spin total étant une constante du système, il s'ensuit qu'il existe deux familles d'excitations transversales conjuguées l'une de l'autre et qui correspondent à $\Delta\sigma_z = \pm 1$.

Nous poserons :

$$\left| \begin{aligned} T_q &= \Sigma[\lambda_k t^+_{k,k+q} + \mu_k t'_{k+q,k}] \\ T'_q &= \Sigma[\lambda_k t'^+_{k,k+q} + \mu_k t_{k+q,k}]. \end{aligned} \right. \quad (69)$$

Les coefficients λ_k et μ_k devront être choisis de telle manière que les opérateurs représentent bien des excitations du système, c'est-à-dire les équations :

$$[H, T_q] = ET_q \quad \text{et} \quad [H, T'_q] = ET'_q \quad (70)$$

devront être identiquement satisfaites.

Les opérateurs T et T' représentent alternativement des opérateurs de création ou d'annihilation ; tout dépend du signe de E. Si un opérateur de création appartient au groupe T, son conjugué est l'opérateur d'annihilation correspondant et appartient au groupe T'. La réciproque est naturellement vraie.

Comme nous l'avons vu, nous devrons prendre comme hamiltonien, en première approximation :

$$H \simeq H_D + H_{INDT}$$

(voir formules (21) et (66)).

Le calcul des commutateurs de H et des divers opérateurs t^+ et t, t'^+ et t' est immédiat si l'on se reporte aux relations de définition et de commutation de ces opérateurs (voir formules (49) et (50)).

$$\begin{aligned} [H_D, t^+_{k,k+q}] &= (\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k) t^+_{k,k+q} \\ [H_D, t'^+_{k,k+q}] &= (\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k) t'^+_{k,k+q} \\ [H_D, t_{k+q,k}] &= + (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon'_k) t_{k+q,k} \\ [H_D, t'_{k+c,k}] &= + (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon'_k) t'_{k+q,k} \end{aligned} \quad (71)$$

$$[H_{INDT}, t^+_{k,k+q}] = -\frac{g}{N} (f_k - g_{k+q}) \sin(\Phi_{k+q} + \Phi_k) \Sigma' \sin(\Phi_{u+q} + \Phi_u) [t^+_{u,u+q} + t'_{u+q,u}] - \frac{g}{N} (f_k - g_{k+q}) \cos(\Phi_{k+q} - \Phi_k) \Sigma' \cos(\Phi_{u+q} - \Phi_u) [t^+_{u,u+q} + t'_{u+q,u}]$$

$$[H_{INDT}, t'^+_{k,k+q}] = -\frac{g}{N} (f_k - g_{k+q}) \sin(\Phi_{k+q} + \Phi_k) \Sigma' \sin(\Phi_{u+q} + \Phi_u) [t'^+_{u,u+q} + t_{u+q,u}] - \frac{g}{N} (f_k - g_{k+q}) \cos(\Phi_{k+q} - \Phi_k) \Sigma' \cos(\Phi_{u+q} - \Phi_u) [t'^+_{u,u+q} - t_{u+q,u}]$$

$$[H_{INDT}, t_{k+q,k}] = \frac{g}{N} (f_{k+q} - g_k) \sin(\Phi_{k+q} + \Phi_k) \Sigma' \sin(\Phi_{u+p} + \Phi_u) [t^+_{u,u+q} + t'_{u+q,u}] - \frac{g}{N} (f_{k+q} - g_k) \cos(\Phi_{k+q} - \Phi_k) \Sigma' \cos(\Phi_{u+q} - \Phi_u) [t^+_{u,u+q} - t'_{u+q,u}]$$

$$[H_{INDT}, t'_{k+q,k}] = \frac{g}{N} (f_{k+q} - g_k) \sin(\Phi_{k+q} + \Phi_k) \Sigma' \sin(\Phi_{u+q} + \Phi_u) [t'^+_{u,u+q} + t_{u+q,u}] - \frac{g}{N} (f_{k+q} - g_k) \cos(\Phi_{k+q} - \Phi_k) \Sigma' \cos(\Phi_{u+q} - \Phi_u) [t'^+_{u,u+q} - t_{u+q,u}]. \quad (72)$$

Remarquons toutefois que les relations de commutations dans lesquelles figurent H_{INDT} n'ont de sens qu'en valeur moyenne et que les commutateurs sont des fonctions de la température, par l'intermédiaire des probabilités $f_k(T)$ et $g_k(T)$.

Remplaçons maintenant dans les relations (70) les opérateurs T_q et T'_q par leurs expressions développées. Les équations couplées qui déterminent à la fois les valeurs des énergies d'excitation E_q et les coefficients λ_{kq} et μ_{kq} (à un facteur de normalisation près) en découlent immédiatement, puisque les relations (79) doivent être identiquement satisfaites (dans la suite, nous écrirons λ_k, μ_k et E, et non λ_{kq}, μ_{kq} et E_q, pour simplifier les notations).

Nous poserons :

$$\sigma = \frac{g}{N} \Sigma' \sin(\Phi_{k+q} + \Phi_k) [(f_k - g_{k+q}) \lambda_k - (f_{k+q} - g_k) \mu_k]$$

$$\tau = \frac{g}{N} \Sigma' \cos(\Phi_{k+q} - \Phi_k) [(f_k - g_{k+q}) \lambda_k + (f_{k+q} - g_k) \mu_k]. \quad (73)$$

Les coefficients λ_k et μ_k s'expriment en fonction de σ et τ.

$$\lambda_k = \frac{\sigma \sin(\Phi_{k+q} + \Phi_k) + \tau \cos(\Phi_{k+q} - \Phi_k)}{\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k - E}$$

$$\mu_k = \frac{\sigma \sin(\Phi_{k+q} + \Phi_k) - \tau \cos(\Phi_{k+q} - \Phi_k)}{\varepsilon_{k+q} - \varepsilon'_k - E} \quad (74)$$

Le report de ces expressions dans les équations (73) donne deux équations couplées en σ et τ, linéaires et homogènes.

Posons :

$$F_q(E) = 1 - \frac{g}{N} \Sigma' \cos^2(\Phi_{k+q} - \Phi_k) \left[\frac{f_k - g_{k+q}}{\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k - E} - \frac{f_{k+q} - g_k}{\varepsilon_{k+q} - \varepsilon'_k - E}\right]$$

$$G_q(E) = 1 - \frac{g}{N} \Sigma' \sin^2(\Phi_{k+q} + \Phi_k) \left[\frac{f_k - g_{k+q}}{\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k - E} - \frac{f_{k+q} - g_k}{\varepsilon_{k+q} - \varepsilon'_k - E}\right]$$

$$H_q(E) = \frac{g}{N} \Sigma' \sin(\Phi_{k+q} + \Phi_k) \cos(\Phi_{k+q} - \Phi_k) \left[\frac{f_k - g_{k+q}}{\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k - E} + \frac{f_{k+q} - g_k}{\varepsilon_{k+q} - \varepsilon' - E}\right]. \quad (75)$$

Les équations en σ et τ s'écrivent :

$$\sigma\, G_q(E) - \tau\, H_q(E) = 0$$
$$-\sigma\, H_q(E) + \tau\, F_q(E) = 0. \quad (76)$$

Ce qui conduit à l'équation aux valeurs propres :

$$\Theta_q(E) \equiv F_q(E)\, G_q(E) - H_q^2(E) = 0. \quad (77)$$

Nous pouvons un peu simplifier l'expression de $F_q(E)$, $G_q(E)$ et $H_q(E)$. En effet, dans la moitié des termes, nous pouvons changer $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{q}$ en $-\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{k}$ en $-(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{q})$. Si l'on tient compte alors de la symétrie des fonctions f_k, g_k et Φ_k par rapport au changement $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$, on peut écrire :

$$F_q(E) = 1 + 2 \frac{g}{N} \Sigma'(f_k - g_{k+q}) \cos^2(\Phi_{k+q} - \Phi_k) \left[\frac{\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k}{E^2 - (\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k)^2}\right]$$

$$G_q(E) = 1 + 2 \frac{g}{N} \Sigma'(f_k - g_{k+q}) \sin^2(\Phi_{k+q} + \Phi_k) \left[\frac{\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k}{E^2 - (\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k)^2}\right]$$

$$H_q(E) = 2 \frac{g}{N} \Sigma'(f_k - g_{k+q}) \sin(\Phi_{k+q} + \Phi_k) \cos(\Phi_{k+q} - \Phi_k) \left[\frac{E}{E^2 - (\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k)^2}\right]. \quad (78)$$

Les fonctions étant écrites sous cette forme, il est alors visible que la fonction $\Theta(E)$ est symétrique par rapport à E. A la racine E de l'équation $\Theta(E) = 0$ correspond toujours la racine $-E$ comme prévu. Aux valeurs positives de E correspondent des opérateurs de création, aux valeurs négatives des opérateurs d'annihilation.

Pour déterminer les solutions de l'équation $\Theta_q(E) = 0$, nous devons placer l'une par rapport à l'autre les courbes $y_1 = F_q(E), G_q(E)$ et $y_2 = H^2_q(E)$. Les pôles doubles des deux fonctions ont même coefficient : $\Theta(E)$ ne contient donc que des pôles simples et change de signe à chaque pôle. Examinons alors le comportement de cette fonction au voisinage de ses pôles. Pour simplifier, nous supposerons que les valeurs de $\boldsymbol{q}$ sont très petites ; le cas où $|\boldsymbol{q}| = 0$ sera étudié et nous extrapolerons les résultats.

Jusqu'ici nous n'avons fait aucune hypothèse sur les valeurs de φ_k. Pour étudier plus simplement l'équation $\Theta_q(E) = 0$, nous pourrons supposer que les fonctions φ_k sont choisies de manière à minimiser les termes d'énergie libre qui proviennent de l'hamiltonien diagonal H_D (formule (33) :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_k(T) = \frac{e_0(T)}{e_k} \quad (79)$$

$$\varepsilon'_k - \varepsilon_k = \frac{e_0(T)}{\sin 2\varphi_k}$$

En conséquence :

$$F_0(E) = 1 + 2 \frac{g}{N} \Sigma'(f_k - g_k) \left[\frac{e_0 \sin 2\varphi_k}{E^2 \sin^2 2\varphi_k - e_0^2}\right]$$

$$G_0(E) = 1 + 2 \frac{g}{N} \Sigma'(f_k - g_k) \left[\frac{e_0 \sin^2 2\varphi_k}{E^2 \sin^2 2\varphi_k - e_0^2}\right] \quad (80)$$

$$H_0(E) = 2 \frac{g}{N} \Sigma'(f_k - g_k) \left[\frac{E \sin^2 2\varphi_k}{E^2 \sin^2 2\varphi_k - e_0^2}\right]$$

Remarquons, en passant, que $\Theta_0(0) = 0$, car $F_0(0) = H_0(0) = 0$ (cf. formule (32)). Cette racine correspond au spinon de vecteur d'onde nul : son énergie est nulle comme prévu. Soit alors :

$$t_k = 2 \frac{g}{N} (f_k - g_k) \frac{e_0 \sin 2\varphi_k}{E^2 \sin^2 2\varphi_k - e_0^2}.$$

Lorsque E tend vers l'une des valeurs $\pm \dfrac{e_0}{\sin 2\varphi_k}$, t_k tend vers l'infini ; par ailleurs, au voisinage de ces valeurs, les fonctions $F_0(E)$, $G_0(E)$ et $H_0(E)$ peuvent être remplacées par leurs équivalents.

$$F_0(E) \simeq F_k + t_k$$
$$G_0(E) \simeq G_k + \sin^2 2\varphi_k\, t_k$$
$$H_0(E) \simeq H_k + \sin 2\varphi_k\, t_k.$$

On en tire alors aisément :

$$\Theta_0(E) \simeq (F_k + t_k)(G_k + \sin^2 2\varphi_k\, t_k) - (H_k + \sin 2\varphi_k\, t_k)^2$$
$$\simeq t_k (\sin^2 2\varphi_k\, F_k + G_k - 2 \sin 2\varphi_k\, H_k) = t_k$$

pour

$$E \# \pm \frac{e_0}{\sin 2\varphi_k}.$$

Ainsi se trouve précisée la nature des pôles de la fonction $\Theta_q(E)$.

Par ailleurs, la forme de l'équation $\Theta_q(E) = 0$ montre qu'il existe autant de racines que $\Theta_q(E)$ possède des pôles, et ces racines doivent être toutes réelles, puisque l'introduction d'un terme de couplage supplémentaire H_{NDU} doit laisser le nombre d'excitations inchangé. Cette remarque permet alors de tracer la courbe $y = \Theta_q(E)$ (voir *fig.* 10).

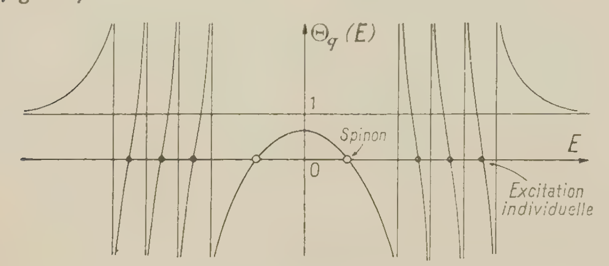


Fig. 10. — Excitations transversales. Représentation de $\Theta_q(E)$.

Nous observons alors que toutes les racines de l'équation $\Theta_q(E) = 0$ sont voisines des pôles de $\Theta_q(E)$, à l'exception des deux racines, les plus basses en valeurs absolues qui, pour de faibles valeurs de $|q|$, sont nettement séparées de l'ensemble continu des autres racines ; ces racines isolées correspondent à une excitation de caractère collectif, comme on peut s'en rendre compte facilement, si l'on calcule les coefficients λ_k et μ_k qui lui sont associés : ce sont des spinons.

Remarquons alors que, pour que ces spinons existent réellement, il faut obligatoirement que $\Theta_q(0) > 0$, au moins pour de petites valeurs de $|\boldsymbol{q}|$. Cette condition est satisfaite si les fonctions φ_k obéissent aux égalités (79), mais il n'en serait pas de même si l'on donnait aux fonctions φ_k des valeurs arbitraires.

En résumé, les énergies des excitations individuelles qui forment un ensemble quasi continu, ne sont que faiblement déplacées, et la limite inférieure de ces énergies d'excitation, pour de petites valeurs de q, est précisément e_0. Il existe, par ailleurs, une excitation collective ou spinon associée à chaque vecteur $\boldsymbol{q}$.

L'énergie du spinon croît à partir de zéro comme $|\boldsymbol{q}|$, puis, au delà de certaines valeurs de $\boldsymbol{q}$, se fond dans l'ensemble continu des excitations individuelles.

L'énergie du spinon, pour de faibles valeurs de $|\boldsymbol{q}|$, peut être facilement calculée, et, pour $T = 0$, l'on obtient :

$$E = qC(\boldsymbol{q}/q)$$

avec

$$C^2(\boldsymbol{n}) = \left[\frac{4g}{Ne_0}\Sigma'\frac{(\boldsymbol{n}\nabla\ \varphi_k)^2}{\sin 2\varphi_k} - \frac{2g}{Ne_0}\Sigma'\sin^3 2\varphi_k(\boldsymbol{n}\nabla\ U_k)^2\right]$$
$$\left[\frac{2g}{Ne_0}\Sigma'\sin 2\varphi_k\cos^2 2\varphi_k\right]\left[\frac{2g}{Ne_0}\Sigma'\sin^3 2\varphi_k\right]^{-1}. \quad (81)$$

5. **Existence des spinons et validité de la théorie.** — Comme nous l'avons vu, pour que toutes les excitations aient un sens, il faut que $\Theta_q(0) \geqslant 0$; et en particulier que $\Theta_0(0) >, 0$; nous avons vérifié par ailleurs que cette dernière condition était satisfaite dans le cas où les φ_k obéissaient aux relations (79) qui correspondent à la minimisation de l'énergie libre dans le cas où l'on néglige tous les termes non diagonaux de l'hamiltonien.

Abandonnons cette restriction et donnons aux φ_k des valeurs arbitraires mais cependant telles que la condition $\Theta_0(0) \geqslant 0$ soit remplie. Nous pouvons alors envisager de calculer les corrections à apporter à l'énergie libre, du fait de l'introduction des termes H_{NDU} ; la méthode utilisée serait analogue à celle qu'ont développé Brueckner, Sawada et Gell-Mann pour un gaz d'électrons libres. L'énergie libre corrigée s'exprime alors en fonction des φ_k qui peuvent être alors déterminés en minimisant cette énergie libre.

Or la condition $\Theta_0(0) \geqslant 0$ restreint les variations de Φ_k. Par conséquence, l'énergie libre du système possède des extrêma sur la surface $\Theta_0(0) = 0$ tracée dans l'espace des Φ_k. Il semble alors légitime d'admettre que le minimum de l'énergie libre correspond effectivement à l'un des points de cette surface. Cette condition traduit le fait que, lorsque le vecteur $|\boldsymbol{q}|$ tend vers zéro, l'énergie des spinons tend vers zéro, ce qui semble raisonnable.

Examinons alors les conséquences de cette remarque. Soit φ_{0k} les valeurs de φ_k qui satisfont aux conditions tg $2\varphi_k = e_0/e_k$ (e_0 étant lui-même fonctions des φ_k).

Admettons que l'introduction des termes H_{NDU} crée seulement une légère perturbation, les valeurs des φ_k seront voisines des valeurs φ_{0k}. Or, pour $T = 0$, on peut écrire en toute généralité :

$$\Theta_0(0) = F_0(0)\ G_0(0)$$

et de plus

$$[G_0(0)]_{\varphi_k=\varphi_{0k}} = 1 - \frac{2g}{Ne_0}\Sigma'\sin^2 2\varphi_{0k} > 0.$$

Donc, si l'on fait varier les valeurs de φ_k au voisinage des valeurs φ_{0k}, la fonction $G_0(0)$ reste positive. La condition $\Theta_0(0) = 0$ s'écrit donc :

$$F_0(0) \equiv 1 - \frac{2g}{N}\Sigma'\frac{1}{\varepsilon'_k - \varepsilon_k} = 0$$

avec

$$\varepsilon'_k - \varepsilon_k = e_k\cos 2\varphi_k + e_0\sin 2\varphi_k \quad \text{(formules (22) et (27)}$$

et

$$e_0 = \frac{2g}{N}\Sigma'\sin 2\varphi_k.$$

Nous en tirons la relation :

$$\left[\frac{\partial F_0(0)}{\partial\varphi_k}\right]_{\varphi_k=\varphi_{0k}} = \left[\frac{2g}{Ne_0^2}\Sigma'\sin^2 2\varphi_u\right]\frac{\partial e_0}{\partial\varphi_k}$$

et, par conséquent :

$$[\mathrm{d}F_0(0)]_{\varphi_k=\varphi_{0k}} = \left[\frac{2g}{Ne_0^2}\Sigma' \sin^3 2\varphi_u\right] \mathrm{d}e_0. \qquad (82)$$

Si, par conséquent, l'introduction de termes non diagonaux peut faire varier légèrement les paramètres φ_k, l'énergie d'activation e_0 doit toutefois rester inchangée, puisque nous avons des raisons de croire que la condition $\Theta_0(0) = 0$ doit rester satisfaite.

Naturellement, il n'en est pas de même lorsque le coefficient g devient petit par rapport à la largeur de la bande de Bloch. Dans ce cas, si l'on tient compte des termes non diagonaux, l'énergie associée à un état de base métallique peut devenir plus basse que l'énergie de l'état de base antiferromagnétique ; il y a alors, dans ce cas, transition brusque de l'état isolant à l'état métallique.

6. **Excitations longitudinales. Théorie plus complète.** — Examinons maintenant la forme exacte des excitations longitudinales (avec conservation du spin). Nous poserons :

$$L_q = \Sigma[\lambda_k\, l^+_{k,k+q} + \mu_k\, l_{k+q,k}]. \qquad (83)$$

Le vecteur $\boldsymbol{q}$ est un vecteur quelconque de la zone de Brillouin. Les coefficients λ_k et μ_k seront choisis de telle manière que les opérateurs L_q représentent bien des excitations du système, c'est-à-dire que les équations

$$[H, L_q] = EL_q \qquad (84)$$

devront être identiquement satisfaites.

Les opérateurs L représentent alternativement des opérateurs de création ou d'annihilation, tout dépend du signe de E. Les opérateurs de création ou d'annihilation sont naturellement conjugués comme on le vérifie sur l'équation (84).

Comme hamiltonien, nous devons prendre, en première approximation :

$$H = H_D + H_{INDL} \quad \text{(voir formules (21) et (67)).}$$

Le calcul des commutateurs de H et des opérateurs l^+ et l est immédiat, si l'on se reporte aux relations de définition et de commutation de ces opérateurs (voir formules (57) et (58)).

$$[H_D, l^+_{k,k+q}] = (\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k)\, l^+_{k,k+q}$$

$$[H_D, l_{k+q,k} = (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon'_k)\, l_{k+q,q}$$

$$[H_{INDL}, l^+_{k,k+q}] = \left[\frac{2g(q) - g}{N}\right](f_k - g_{k+q}) \sin(\Phi_{k+q} - \Phi_k)$$
$$\Sigma' \sin(\Phi_{u+q} - \Phi_u)\,[l^+_{u,u+q} - l_{u+q,u}]$$
$$= \frac{g}{N}(f_k - g_{k+q}) \cos(\Phi_{k+q} + \Phi_k)$$
$$\Sigma' \cos(\Phi_{u+q} + \Phi_u)\,[l^+_{u,u+q} + l_{u+q,u}]$$

$$[H_{INDL}, l_{k+q,k}] = \left[\frac{2g(q) - g}{N}\right](f_{k+q} - g_k) \sin(\Phi_{k+q} - \Phi_k)$$
$$\Sigma' \sin(\Phi_{u+q} - \Phi_u)\,[l^+_{u,u+q} - l_{u+q,u}]$$
$$+ \frac{g}{N}(f_k - g_{k+q}) \cos(\Phi_{k+q} + \Phi_k)$$
$$\Sigma' \cos(\Phi_{u+q} + \Phi_u)\,[l^+_{u,u+q} + l_{u+q,u}]. \qquad (85)$$

Remarquons que les relations de commutation dans lesquelles figurent H_{INDL} n'ont de sens qu'en valeur moyenne et que les commutateurs sont des fonctions de la température par l'intermédiaire des probabilités $f_k(T)$ et $g_k(T)$.

Remplaçons maintenant dans la relation (84) l'opérateur L par son expression développée. Nous en tirons des équations couplées qui permettent à la fois de calculer les valeurs de l'énergie d'interaction E et des coefficients λ_k et μ_k.

Nous poserons :

$$\sigma = \left[\frac{2g(q) - g}{N}\right] \Sigma' \sin(\Phi_{u+q} - \Phi_u)$$
$$[(f_u - g_{u+q})\,\lambda_u + (f_{u+q} - g_u)\,\mu_u]$$

$$\tau = \frac{g}{N}\Sigma' \cos(\Phi_{u+q} + \Phi_u)\,[(f_u - g_{u+q})\,\lambda_u - (f_{u+q} - g_u)\mu_u]$$

$$(86)$$

Les coefficients λ_k et μ_k s'expriment en fonction de σ et de τ.

$$\lambda_k = \frac{-\sigma \sin(\Phi_{k+q} - \Phi_k) + \tau \cos(\Phi_{k+q} + \Phi_k)}{\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k - E}. \qquad (87)$$

$$\mu_k = \frac{\sigma \sin(\Phi_{k+q} - \Phi_k) + \tau \cos(\Phi_{k+q} + \Phi_k)}{\varepsilon_{k+q} - \varepsilon'_k - E}.$$

Le report de ces expressions dans les équations (86) donne deux équations couplées en σ et τ, Les équations en σ et τ s'écrivent :

$$\sigma F_q(E) - \tau\left(\frac{2g(q) - g}{g}\right) H_q(E) = 0 \qquad (88)$$

$$\sigma H_q(E) + \tau G_q(E) = 0.$$

Ce qui conduit à l'équation aux valeurs propres :

$$\Theta_q(E) \equiv F_q(E)\, G_q(E) + \left[\frac{2g(q) - g}{g}\right] H_q^2(E) = 0. \quad (89)$$

Après simplification les expressions $F_q(E)$, $G_q(E)$ et $H_q(E)$ prennent les formes suivantes :

$$F_q(E) = 1 - 2\left(\frac{2g(q) - g}{N}\right)\Sigma'(f_k - g_{k+q})$$
$$\sin^2(\Phi_{k+q} - \Phi_k)\left[\frac{\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k}{E^2 - (\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k)^2}\right]$$

$$G_q(E) = 1 + 2\frac{g}{N}\Sigma'(f_k - g_{k+q})$$
$$\cos^2(\Phi_{k+q} + \Phi_k)\left[\frac{\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k}{E^2 - (\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k)^2}\right]$$

$$H_q(E) = -2\frac{g}{N}\Sigma' \sin(\Phi_{k+q} - \Phi_k)$$
$$\cos(\Phi_{k+q} + \Phi_\lambda)\left[\frac{\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k}{E^2 - (\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k)^2}\right] \quad (90)$$

Les fonctions étant écrites sous cette forme, il est visible que la fonction $\Theta(E)$ est symétrique par rapport à E. Aux valeurs positives de E correspondent des opérateurs de création d'excitation, aux valeurs opposées de E des opérateurs d'annihilation qui leur sont associés.

Remarquons encore que $\Theta_q(E)$ ne contient que des pôles simples, et par conséquent, change de signe à chaque pôle. Le nombre de racines de l'équation $\Theta_q(E) = 0$ sera encore égal au nombre de pôles de la fonction $\Theta_q(E)$.

L'étude générale des excitations étant difficile, étudions simplement le cas où $\boldsymbol{q} \to 0$. Nous supposerons que les fonctions φ_k obéissent aux égalités (78) et que la température T est nulle.

Dans ce cas simple, nous pourrons poser :

$$g(q) \simeq \frac{\gamma}{q^2} = \frac{4\pi e^2 n}{q^2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{\nu} q. \tag{91}$$

Les différentes fonctions s'expriment alors simplement en fonction des φ_k.

$$F_0(E) = 1 - \frac{4\gamma}{N} \Sigma'(\boldsymbol{\nu}\nabla \ \Phi_k)^2 \frac{e_0 \sin 2\varphi_k}{E^2 \sin^2 2\varphi_k - e_0^2}$$

$$G_0(E) = 1 + 2\frac{g}{N} \Sigma' \frac{e_0 \sin 2\varphi_k \cos^2 2\varphi_k}{E^2 \sin^2 2\varphi_k - e_0^2} \tag{92}$$

$$\left[\frac{1}{q} H_q(E)\right]_{q=0} = -2\frac{g}{N} \Sigma'(\boldsymbol{\nu}\nabla \ \Phi_k) \frac{e_0 \sin 2\varphi_k \cos 2\varphi_k}{E^2 \sin^2 2\varphi_k - e_0^2} = 0.$$

L'équation aux valeurs propres s'écrit alors :

$$\Theta_0(E) \equiv F_0(E) \ G_0(E) = 0.$$

Les valeurs propres E sont donc solutions de l'une ou l'autre des équations $F_0(E) = 0$ ou $G_0(E) = 0$. Dans chaque équation, le nombre de racines est égal au nombre de pôles des fonctions $F_0(E)$ et $G_0(E)$, mais les fonctions $F_0(E)$ et $G_0(E)$ comportent moitié moins de pôles que les fonctions $F_q(E)$ et $G_q(E)$, puisque, pour $\boldsymbol{q} = 0$, nous aurons

$$\varepsilon'_{k+q} - \varepsilon_k = \varepsilon'_{-k+q} - \varepsilon_{-k}.$$

Le nombre total de racines est donc bien conservé comme il se doit.

Les allures des fonctions $F_0(E)$ et $G_0(E)$ sont représentées sur les figures 11 et 12.

Examinons les racines de l'équation $G_0(E) = 0$. Nous remarquons que $G_0(e_0) = 0$, et que toutes les excitations qui correspondent à ces racines ont le caractère d'excitations individuelles, caractérisées par une énergie d'activation e_0 et forment un ensemble quasi-continu.

Étudions alors les racines de l'équation $F_0(E) = 0$. A ces racines correspondent des excitations individuelles qui forment un ensemble quasi-continu et une excitation collective. Comme toujours, pour les excitations individuelles, il existe une énergie d'activation e_0. L'excitation collective, quand elle existe, est du type plasmon. Son énergie est nettement supérieure à celle de toutes les excitations individuelles.

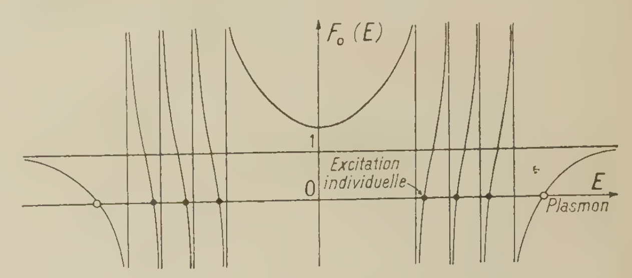


FIG. 11. — Excitations longitudinales. Représentations de $F_0(E)$.

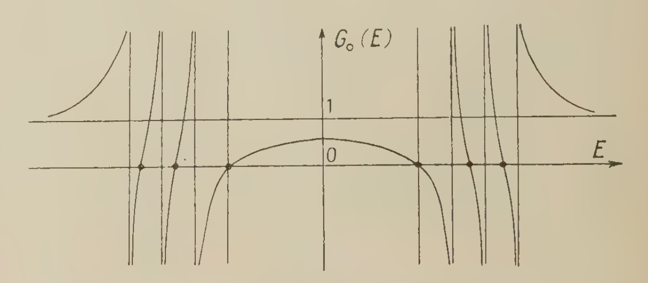


FIG. 12. — Excitations longitudinales. Représentation de $G_0(E)$.

L'énergie du plasmon peut se déduire de l'équation implicite en E (formules (91 et 92)) :

$$\frac{2e^2}{\pi^2} \int_{DZ} (\boldsymbol{\nu}\nabla \ \Phi_k)^2 \frac{e_0 \sin 2\varphi_k}{E^2 \sin^2 2\varphi_k - e_0^2} \, d^3 k = 1. \tag{93}$$

Nous pouvons évaluer approximativement l'énergie E du plasmon en procédant comme au paragraphe III-6 et en définissant une énergie de coupure e_c.

La formule (105) se transforme et donne :

$$\frac{e^2 S^2 e_0^2 e_c}{6\pi^5 n} \int_0^{e_c} \frac{(e_0^2 + e^2)^{-3/2}}{E^2 - e_0^2 - e^2} \, de = 1 \tag{94}$$

(S représente la surface de la zone réduite dans l'espace des vecteurs d'onde).

En particulier, dans le cas où $E^2 \gg e_0^2 + e_c^2$, on obtient approximativement :

$$E^2 = \frac{e^2 S^2}{6\pi^5 n} \left(\frac{e_c^2}{\sqrt{e_0^2 + e_c^2}}\right). \tag{95}$$

L'énergie des plasmons décroît donc avec e_0 comme on pouvait s'y attendre.

En résumé, nous observons que, pour toutes les excitations individuelles, l'introduction dans l'hamiltonien des termes non diagonaux H_{NDU} laisse subsister une énergie d'activation e_0. Toutefois, à côté des excitations individuelles, il existe des excitations de caractère collectif, spinons et plasmons, mais ces dernières ne détruisent pas le caractère isolant du système.

VIII

APPLICATIONS DE LA THÉORIE AUX MODÈLES DÉSORDONNÉS

1. **Remarques générales.** — Jusqu'ici nous avons supposé que le réseau ionique qui constitue notre modèle est ordonné et facilement décomposable en deux sous-réseaux également ordonnés. Nous avons, de plus, admis que le nombre des électrons était égal au nombre des ions.

Or, dans les antiferromagnétiques non stoechiométriques comme Ti^2O^n ($n \# 3$), les atomes constituants ne peuvent former un réseau ordonné. Dans les bandes d'impureté, il en est de même, et les centres d'impureté sont en général répartis tout à fait au hasard. De plus, les spécimens semi-conducteurs contenant le plus souvent plusieurs types d'impuretés, il y a compensation partielle. Ainsi, par exemple, aux basses températures, dans un spécimen de type n, plusieurs électrons provenant des niveaux donneurs sont captés par les impuretés acceptrices. Le nombre des électrons qui se déplacent dans la bande formée par les impuretés donatrices est donc inférieur au nombre des ions qui constituent le support de cette bande. L'expérience montre alors que, même dans ce cas, tout se passe comme s'il existait une énergie d'excitation pour les électrons de la bande d'impureté.

Ce phénomène est difficile à expliquer si l'on part d'un schéma de bandes rigides. Un essai d'interprétation a toutefois été donné par Mott [5]. Il part du fait qu'un centre minoritaire chargé doit retenir autour de lui une charge égale et opposée de façon à sauvegarder la neutralité électrique. Ainsi pour un spécimen de type n, si un centre accepteur capte un électron, il devient chargé, et doit retenir un trou. Il admet alors que ce trou ne peut devenir tout à fait libre que si on lui fournit une énergie suffisante pour l'arracher au centre accepteur. Cette interprétation, toutefois, semble douteuse : on peut, en effet, admettre que la charge compensatrice est simplement due à la polarisation des électrons de la bande d'impureté due aux centres donneurs.

Reprenant alors la question sous un angle nouveau, nous verrons que, par application directe de notre théorie au cas désordonné, on peut montrer que, pour de faibles densités en impureté, les électrons de la bande d'impureté ne peuvent être excités sans énergie d'activation ; c'est cette question que nous allons maintenant étudier.

2. **Extension de la théorie.** — Soit alors un grand nombre d'électrons en mouvement dans un potentiel aléatoire, créé par un réseau désordonné d'ions et par les charges moyennes dues aux électrons. Les solutions du problème à un électron sont des ondes analogues aux ondes de Bloch. On peut encore définir approximativement pour chacune de ces ondes un vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$. Dans le cas à une dimension, la correspondance entre un vecteur $\boldsymbol{k}$ et sa fonction d'onde est automatique, même si le potentiel n'est pas périodique ; en effet, le nombre k peut être relié au nombre de zéros des fonctions d'onde supposées réelles. Dans le cas tridimensionnel, la situation est plus délicate ; en fait, la plupart des méthodes d'approximation utilisées pour calculer les fonctions d'onde dans l'espace à trois dimensions, font appel plus ou moins implicitement à la notion de vecteur d'onde. Dans le cas général, on peut donc, sans grande erreur, associer à chaque onde son vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$.

Simplement, l'introduction d'un potentiel aléatoire tend à élargir la bande de Bloch en favorisant la création de queues de bande vers les hautes et aussi les basses énergies.

Formellement, l'hamiltonien de Bloch est donc identique que l'on se place dans le cas ordonné ou le cas désordonné. Toutefois, la notion de zone de Brillouin perd toute signification nette, et les niveaux E_k ne sont plus périodiques par rapport à $\boldsymbol{k}$.

L'hamiltonien d'interaction garde lui aussi une forme analogue, mais la conservation des vecteurs d'onde n'est plus qu'approximative. Plus précisément, dans un réseau ordonné, l'hamiltonien d'interaction contient deux sortes de termes : les termes normaux pour lesquels la somme des vecteurs d'onde appartiennent à la première zone de Brillouin est strictement conservée, et les termes « Umklapp » pour lesquels cette somme n'est conservée qu'à une translation du réseau réciproque près. Si donc le réseau est perturbé, les termes normaux seront à peu près conservés, mais il est normal de penser que les termes « Umklapp » seront très sensiblement modifiés.

Voyons alors comment notre méthode peut être appliquée au cas désordonné. Soit S la surface de Fermi associée à l'énergie du type de Bloch et V le volume de l'espace réciproque intérieure à cette surface. La surface de Fermi, en général, n'est pas sphérique. En effet, un réseau plus ou moins désordonné conserve souvent des directions cristallines à peu près définies comme cela se rencontre dans les antiferromagnétiques. De même, dans les semi-conducteurs où les centres d'impureté sont répartis complètement au hasard, la surface de Fermi associée à ces centres possède la symétrie du cristal porteur. La forme de la surface de Fermi pourra rappeler celle d'un polyèdre simple ; par exemple, dans le cas d'un cristal cubique, le polyèdre sera un cube ou un octaèdre.

Ces polyèdres seront tels que les faces opposées puissent se correspondre deux à deux par translation. Soit $\boldsymbol{p}_j$ ces translations. Pour un cube, par exemple, nous aurons trois translations $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ et $\boldsymbol{p}_3$ parallèles aux arêtes du cube. Le volume du cube

sera pris égal à V, c'est-à-dire qu'il sera tel qu'il contienne autant de niveaux qu'il y a d'électrons dans la bande que nous considérons. Le polyèdre choisi jouera alors le rôle de zone réduite.

Dans le cas ordonné, à chaque vecteur $\boldsymbol{k}$ de la demi-zone réduite, était associé un vecteur $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{p}$ extérieur à cette zone. De même, ici, nous associerons à chacun des vecteurs $\boldsymbol{k}$ intérieur au polyèdre, l'un des vecteurs $\boldsymbol{k} \pm \boldsymbol{p}_j$. Contrairement au cas ordonné, les différents vecteurs $\boldsymbol{p}_j$ ne sont pas équivalents entre eux, de même que les vecteurs $2\boldsymbol{p}_j$ ne sont pas équivalents à zéro. Par conséquent, le signe et l'indice j du vecteur choisi dépendront de la région du polyèdre à laquelle appartient le vecteur $\boldsymbol{k}$. Ainsi un cube de centre O sera décomposé en 6 pyramides de centre 0 ayant pour bases les faces du cube. Les faces opposées du polyèdre se correspondent point par point. Le vecteur correspondant à $\boldsymbol{k}$ sera noté $\boldsymbol{k}'$.

Nous pouvons alors effectuer une transformation analogue à la transformation définie en III-3 (à condition de remplacer $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{p}$ par $\boldsymbol{k}'$). Comme précédemment, nous obtenons ainsi un abaissement de l'énergie de base du système. Ce résultat est particulièrement facile à prévoir si l'on se réfère au concept de paires, comme au paragraphe VI. Le gain d'énergie provient de l'échange entre paires. Les termes directs et les termes « Umklapp » participent à cet échange.

Dans le cas ordonné. le choix du vecteur $\boldsymbol{p}$ est impératif, parce qu'alors les termes directs et les termes « Umklapp » doivent apporter leur contribution, pour que l'énergie de l'état de base soit minimum. Il n'en est pas de même dans le cas désordonné ; en effet, la conservation rigoureuse des moments n'est pas imposée aux termes « Umklapp », et la contribution de ces termes est très faible. Au contraire, le gain d'énergie obtenu grâce à la transformation est d'autant plus important que l'échange porte sur un plus grand nombre de paires. Il faut que la demi-bande inférieure soit pleine. C'est pourquoi le volume du polyèdre n'est pas arbitraire ; il doit contenir autant de niveaux qu'il y a électrons dans la bande, Les valeurs des $\boldsymbol{p}_j$ doivent donc s'ajuster automatiquement de façon que la demi-bande inférieure soit pleine, ce qui conduit à une minimisation de l'énergie de l'état de base.

Ainsi l'on peut comprendre pourquoi dans les bandes d'impuretés aux faibles densités, une énergie d'activation d'impureté se manifeste toujours, même dans les spécimens partiellement compensés.

Du point de vue pratique, l'état de base peut être calculé en ne tenant compte que des termes diagonaux de l'hamiltonien. La forme de H_D reste pratiquement inchangée. Toutefois, les termes d'échange sont scindés en plusieurs groupes, chaque groupe étant associé à l'un des vecteurs $\boldsymbol{p}_j$. Les vecteurs d'onde appartenant à la région j seront notés $\boldsymbol{k}_j$ et leurs vecteurs conjugués seront $\boldsymbol{k}'_j = \boldsymbol{k}_j \pm \boldsymbol{p}_j$. Les termes « Umklapp » étant négligés, les seuls échanges possibles seront du type normal (voir figure 13 et n'interviendront qu'entre paires appartenant à la même région j).

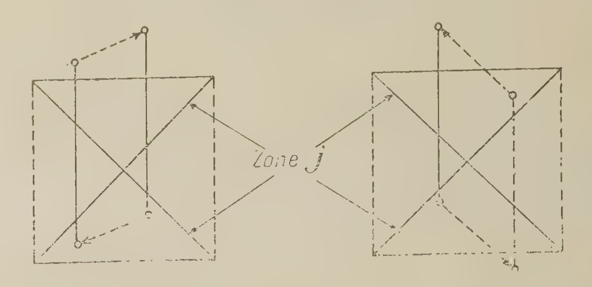


Fig. 13. — Échanges normaux pour un réseau désordonné.

L'hamiltonien diagonal s'écrit :

$$H_D = \sum_k{}' \big[(E_k \cos^2 \varphi_k^\varepsilon + E_{k'} \sin^2 \varphi_k^\varepsilon)\, A_k^{+\varepsilon} A_k^\varepsilon$$

$$+ (E_k \sin^2 \varphi_k^\varepsilon + E_{k'} \cos^2 \varphi_k^\varepsilon)\, B_k^{+\varepsilon} B_k^\varepsilon\big] + H_{ICD}$$

$$- 2\,\frac{g}{N} \sum_{ku}{}' [A_k^{+\varepsilon} A_k^\varepsilon + B_k^{+\varepsilon} B_k^\varepsilon][A_u^{+\varepsilon} A_u^\varepsilon + B_u^{+\varepsilon} B_u^\varepsilon]$$

$$- \frac{g}{4N} \sum_j \Big[\sum_{k_j, u_j}{}' \sin 2\varphi_{k_j} \big(A_{k_j}^{+\varepsilon} A_{k_j}^\varepsilon - B_{k_j}^{+\varepsilon} B_{k_j}^\varepsilon\big)$$

$$\sin 2\varphi_{u_j} \big(A_{u_j}^{+\varepsilon} A_{u_j}^\varepsilon - B_{u_j}^{+\varepsilon} B_{u_j}^\varepsilon\big)\Big] \quad (96)$$

(la notation $\sum_{kj}$ indique que la sommation se fait sur tous les vecteurs $\boldsymbol{k}$ intérieurs à la zone j). Le terme H_{ICD} est un terme coulombien sans importance pratique dans notre calcul.

La fonction d'onde de l'état de base sera toujours :

$$F = \Pi'_k\, A_k^{+\alpha} B_k^{+\beta} F_0.$$

Tous les zones j étant supposées identiques, on pourra définir une énergie d'excitation e_0 unique :

$$e_0 = e_{0_j} = \frac{g}{N} \sum_{k_j}{}' \sin 2\varphi_{k_j}. \quad (97)$$

L'énergie de l'état de base sera minimum, si l'on a encore :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_k = \frac{e_0}{e_k} \quad \text{avec} \quad e_k = E_{k'} - E_k. \quad (98)$$

On remarque que l'énergie d'excitation est plus faible que dans le cas ordonné. Supposons, par exemple, le polyèdre cubique : tout se passe comme si le coefficient g avait été remplacé par $g/6$. L'omission des termes « Umklapp » en est la cause directe.

Notre théorie s'applique donc au cas désordonné moyennant quelques modifications ; ce résultat n'a rien d'étonnant. En effet, nous avons vu précédemment que le gain d'énergie obtenu provient de

la ségrégation partielle d'électrons de spins opposés sur deux sous-réseaux différents. Or, pour que cette condition soit réalisée, peu importe que les réseaux soient ordonnés ou non et peu importe que le nombre des électrons soit vraiment égal au nombre des ions, pourvu que la différence soit petite.

Toutefois, et comme dans le cas ordonné, pour que ce processus soit effectivement réalisé, il faut que l'énergie du système dans cet état de ségrégation partiel soit inférieure à l'énergie de l'état métallique, compte tenu de l'énergie de corrélation classique. Cette énergie de corrélation est celle que l'on peut calculer, quand on tient compte de la modification de l'état de base due à l'introduction des termes H_{NDU} définis au paragraphe VIII.

IX

DENSITÉ DES IONS ET PASSAGE DE L'ÉTAT MÉTALLIQUE A L'ÉTAT ANTIFERROMAGNÉTIQUE PARTIEL

L'énergie de l'état de base du système supposé désordonné ou non possède en général pour des variations des fonctions φ_k plusieurs extrema. L'état métallique ($\varphi_k = 0$) correspond toujours à l'une de ces valeurs extrêmes de l'énergie. Cette propriété est évidente, puisque tout changement des φ_k en $-\varphi_k$ laisse l'énergie de base invariante ; en effet, les spins associés aux sous-réseaux A et B sont implicitement interchangés. Pour de fortes densités ioniques, cet état métallique est stable ; c'est l'état de base du système.

Par ailleurs, quand la densité décroît, il apparaît un état antiferromagnétique partiel tel que l'énergie de base associée à cet état soit aussi minimum pour de petites valeurs de φ_k. Une première condition pour qu'un tel état puisse apparaître, a été donnée au paragraphe IV-7 ; pour que notre modèle présente réellement une bande interdite de largeur η ($\eta < e_0$), il faut que l'énergie e_0 soit supérieure à la fluctuation maximum de l'énergie de Bloch sur la surface de la zone réduite. Cette condition ne peut être réalisée que si la densité électronique est assez basse, mais ce n'est pas un critère suffisant pour affirmer que l'état antiferromagnétique obtenu possède réellement une énergie inférieure à celle de l'état de base métallique.

En effet, pour comparer les énergies des deux états, il faut tenir compte de l'énergie de corrélation électronique. La réduction de l'énergie obtenue ainsi est due à un effet de polarisation des électrons et n'a été calculée que pour un gaz d'électrons libres.

Toutefois cette énergie de corrélation est certainement bien plus importante pour un état métallique que pour un état antiferromagnétique partiel. Il paraît donc assez normal d'admettre avec Mott [5] qu'au voisinage d'une certaine densité électronique critique, il y a passage brusque de l'état métallique à l'état isolant.

Pour nous fixer les idées, nous pouvons examiner le comportement d'un gaz d'électrons libres ; la densité est définie par le nombre sans dimension r_s (voir I-1). Essayons alors d'estimer la valeur de r_s qui correspond au point de transition. (Nous noterons : $a_0 = \hbar^2/me^2$ rayon de Bohr ; $E_0 = \hbar^2/2ma_0^2$ énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène).

L'énergie des électrons libres a été calculée par Gell-Mann, Brueckner et Sawada [4] ; on obtient pour l'énergie de base, par électron :

$$E_L = E_B + E_E + E_{E'} + E_C \qquad (99)$$

E_B est l'énergie de Bloch

$$\frac{E_B}{E_0} = \frac{3}{5}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3}\frac{1}{r_s^2} = \frac{2,21}{r_s^2} \qquad (100)$$

E_E est l'énergie d'échange

$$\frac{E_E}{E_0} = -\frac{3}{2\pi}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3}\frac{1}{r_s} = -\frac{0,916}{r_s} \qquad (101)$$

E_E' est aussi un terme d'échange, obtenu par un calcul de perturbation au deuxième ordre ; il vaut

$$E_{E'}/E_0 = 0,046 \qquad (102)$$

E_C est l'énergie de corrélation

$$\frac{E_C}{E_0} = \frac{3}{4\pi}\int_0^\infty q^3\,\mathrm{d}q\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\alpha^2 r_s^2}\left\{\mathrm{Log}\left[1+\frac{\alpha\, r_s}{\pi^2 q^2}Q_q(u)\right]-\frac{\alpha\, r_s}{\pi^2 q^2}Q_q(u)\right\}$$

avec

$$Q_q(u) = \int_{\substack{|\mathbf{p}|<1\\|\mathbf{p}+\mathbf{q}|>1}} \mathrm{d}^3 p\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\, e^{itug}\exp\left[-|t|\left(\frac{q^2}{2}+\boldsymbol{qp}\right)\right].$$

Les variations de la fonction $E_L(r_s)$ obtenues par intégration numérique sont représentées sur la figure 14. Remarquons que les approximations

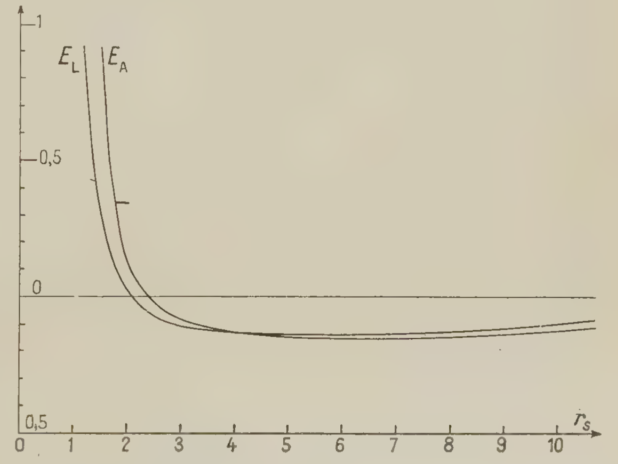


Fig. 14. — Énergies comparées d'un système d'électrons libres dans l'état métallique (E_L) et dans l'état isolant antiferromagnétique (E_A).

faites sont surtout valables pour de petites valeurs de r_s ; néanmoins, par extrapolation, nous pouvons

utiliser la formule (99) pour estimer l'ordre de grandeur de la valeur de r_s au point de transition.

Calculons maintenant l'énergie de l'état de base du système antiferromagnétique ; l'énergie de corrélation qui est faible, sera négligée. La première tâche consiste alors à évaluer le coefficient g. Nous remarquons sur la formule (21) que l'énergie d'échange vaut $E_E = - g/4$.

Identifions cette valeur à la valeur de E_E calculée pour un gaz d'électrons libres (101). On obtient ainsi une valeur très approximative de g, soit :

$$g = \frac{6}{\pi}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3}\frac{E_0}{r_s} = \frac{3,66}{r_s}E_0. \qquad (103)$$

Nous pouvons maintenant supposer que, pour un gaz d'électrons libres antiferromagnétiques, le réseau est cubique centré, ce qui implique que la zone réduite est un cube d'arête p.

Posons :

$$\mu = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{r_s^2}E_0. \qquad (104)$$

L'énergie d'excitation e_0 et l'énergie de l'état de base E_A sont données par les équations implicites suivantes :

$$e_0 = \mu S$$

$$\left(1 - \frac{S^2}{2}\right)\operatorname{Arg\,sh}\left(\frac{1}{S}\right) + 2S - \frac{3}{2}\sqrt{1 + S^2} = \frac{\mu}{3g}$$

$$E_A = \mu\left[\frac{3S^2}{2}\left(S^2 - \frac{3}{2}\right)\operatorname{Arg\,sh}\left(\frac{1}{S}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{1 + S^2}}{8}(1 + 16S^2) - \frac{11S^3}{4}\right] - \frac{g}{4}. \qquad (105)$$

Les variations de la fonction $E_A(r_s)$ sont représentées sur la figure 14. Le point de transition se détermine par l'équation $E_A(r_s) = E_L(r_s)$. On trouve ainsi $r_s = 4$. Cette valeur est évidemment trop petite, puisque une telle valeur correspond aux densités électroniques que l'on rencontre dans les alcalins ; toutefois, nous remarquons que la valeur de r_s au point de transition dépend fortement de la valeur de g choisie. Pour déterminer le point de transition avec quelque précision, il faudrait calculer très soigneusement l'énergie d'échange. Il est toutefois vraisemblable que le point de transition corresponde aux valeurs de r_s voisines de 7 ou 8.

X

ANTIFERROMAGNÉTIQUES ET BANDES D'IMPURETÉ. GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE.

Les résultats obtenus sur les modèles simples étudiés jusqu'ici permettent de mieux comprendre les anomalies de conductivité que l'on peut observer dans les antiferromagnétiques et les semi-conducteurs impurs, phénomènes décrits dans les premiers chapitres.

Ces anomalies s'expliquent qualitativement, si l'on admet que, par suite de l'interaction coulombienne entre électrons au-dessous d'une certaine densité d'ions et d'électrons, il apparaît une faille dans les bandes d'énergie, la largeur de la faille dépendant à la fois des densités électroniques et de la température.

Le mécanisme d'un tel phénomène a été analysé sur un modèle simplifié. Malheureusement, l'application directe de la théorie à des exemples concrets reste difficile. En effet, le problème se complique du fait que les états associés aux orbitales atomiques sont en général dégénérés ou presque dégénérés. Il faut donc admettre que les électrons peuvent occuper plusieurs orbitales sur le même ion et non plus une seule comme nous l'avions supposé jusqu'ici.

Cette situation se rencontre dans les antiferromagnétiques. En effet, les niveaux intéressants appartiennent à la couche $3d$; il y a donc dégénérescence. En fait, comme nous l'avons vu, l'existence d'un champ cristallin lève certaines dégénérescences ; néanmoins, au centre de la zone de Brillouin, il subsiste toujours des dégénérescences compatibles avec les symétries du cristal.

Une situation analogue se présente dans les semi-conducteurs, comme le germanium et le silicium. Examinons d'abord le cas des semi-conducteurs de type n. La bande de conduction présentant toujours un certain nombre de vallées équivalentes, il s'ensuit que les niveaux d'impuretés donneurs doivent être fortement dégénérés.

En fait, les fonctions d'ondes électroniques relatives aux centres d'impureté forment des représentations du groupe des symétries du cristal.

On obtient donc ainsi, pour chaque niveau de type hydrogénoïde, autant de niveaux qu'il y a de vallées. Tous ces niveaux sont dégénérés ou presque dégénérés ; toutefois, il est vraisemblable que le niveau fondamental soit légèrement séparé des autres niveaux et corresponde aux valeurs $\alpha_j = 1$.

Ainsi, seule la fonction la plus symétrique garde une valeur finie non nulle au voisinage du centre d'impureté. Or, à proximité de l'impureté, l'effet d'écran tend à diminuer ; l'électron qui gravite autour de l'impureté est donc plus fortement attiré aux courtes distances. L'amplitude de la fonction d'onde sur l'atome d'impureté est donc plus forte que ne le prévoit la théorie classique. Il en résulte donc un abaissement de ce niveau, ce qui lève la dégénérescence.

A priori, cet effet doit être particulièrement sensible dans le silicium, car la dimension des orbites y est plus petite que dans le garmanium. De fait, pour le silicium, l'abaissement d'énergie est de l'ordre de 0,013 eV (voir Kohn [19]).

Cette énergie, toutefois, est encore de l'ordre de grandeur de l'énergie d'excitation des électrons qui se déplacent dans la bande d'impureté. En conséquence, il est difficile de négliger les interactions entre les différents niveaux qui découlent de la multiplicité des vallées de la bande de conduction, et particulièrement en ce qui concerne le germanium. La structure des bandes d'impureté, compte tenu des interactions coulombiennes, doit donc être assez compliquée pour de faibles densités de centres.

Dans les semi-conducteurs de type p, silicium ou germanium, la bande de valence possède un maximum unique situé au centre de la zone de Brillouin. Le niveau d'impureté fondamental est alors non dégénéré, mais la fonction d'onde ne possède pas de forme simple, ce qui complique grandement le problème. Par ailleurs, il existe aussi des niveaux excités assez voisins de l'état fondamental.

Toutes ces éventualités, présentent un caractère commun : l'existence de niveaux excités voisins du niveau fondamental. Quand les centres d'impureté sont suffisamment rapprochés, ces niveaux donnent naissances à des bandes. Les fonctions de Wannier associées aux bandes excitées sont orthogonales aux fonctions de Wannier de l'état fondamental. Cette remarque suggère, qu'au cas où deux électrons doivent être placés sur le même ion, il puisse être plus intéressant du point de vue énergétique d'attribuer au deuxième électron une orbite correspondant à un état excité de l'ion, de façon à réduire l'énergie de répulsion coulombienne. Il semble donc que l'on soit obligé de considérer l'ensemble des bandes provenant des niveaux dégénérés et quasi-dégénérés ; l'hamiltonien prend par conséquent une forme compliquée, puisqu'il fait intervenir des couplages entre les différentes bandes.

Il semble toutefois que les principes qui nous ont guidé dans l'étude de modèles simples puissent s'appliquer à ces structures compliquées.

Les transformations utilisées permettraient encore de passer continûment de la représentation de Bloch à celle d'Heitler et London.

Naturellement, on aboutirait à des conclusions similaires : passage de l'état métallique à l'état isolant quand la densité électronique du système décroît et existence d'une énergie d'excitation $e_0(T)$ variable avec la température. On pourrait encore définir des pseudo-niveaux d'énergie, variables avec la température. Les excitations se décomposeraient encore en excitations individuelles et excitations collectives : plasmons et spinons.

Je remercie M. le Pr Y Rocard qui a bien voulu m'accueillir dans son laboratoire et je veux exprimer toute ma gratitude à M. le Pr P. Aigrain qui m'a guidé pendant ces dernières années et dont la bienveillance et les conseils m'ont toujours été si précieux.

Manuscrit reçu le 2 mars 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[2] Gell-Mann (M.) et Brueckner (K. A.), *Phys. Rev.*, 1957, **106**, 364.

[4] Sawada (K.), *Phys. Rev.*, 1957, **106**, 369. Kawada (K.), Brueckner (K. A.), Fukuda (N.) et Brout (R.), *Phys. Rev.*, 1957, **108**, 507.

[5] Mott (N. F.), Suppl. *Nuovo Cimento*, 1958, **7**, 318. Les références des articles antérieurs de Mott se trouvent dans cette publication.

[19] Kohn (W.), " Solid State Physics ", V, p. 258, Academic Press, New York, 1957.

[28] des Cloizeaux (J.), *J. Physique Rad.*, 1959, **20**, 696.

LETTRES A LA RÉDACTION

MESURES DE COINCIDENCES RETARDÉES DANS LE ^{116}Sn

Par A. MEESSEN et L. GRENACS,
Centre de Physique Nucléaire,
Université de Louvain, Louvain (Belgique).

Les mesures de corrélations angulaires effectuées dans notre laboratoire [1], [2] sur la cascade (0,410 γ) (2,150 γ) du ^{116}Sn provenant de l'^{116}In ont montré une différence pour une source solide et une source liquide. Le temps de résolution du circuit de coïncidence était 2,5.10^{-8} sec. Le résultat de Scharenberg [3] pour une source solide, avec un temps de résolution de 1.10^{-8} sec se rapproche nettement de notre résultat pour source liquide. Il était donc évident qu'une perturbation s'introduisait quand on admettait des gammas qui sont émis avec un retard supérieur à 10^{-8} sec.

Les mesures de coïncidences retardées ont donné des résultats particulièrement intéressants. La cascade de référence (0,136 γ) (0,482 γ) du ^{181}Ta, provenant du ^{181}Hf, indiquait un demi-temps de vie $T_{1/2} = (1{,}0 \pm 0{,}1)\ 10^{-8}$ sec en accord avec les résultats d'autres auteurs. La droite correspondante (*fig.* 1)

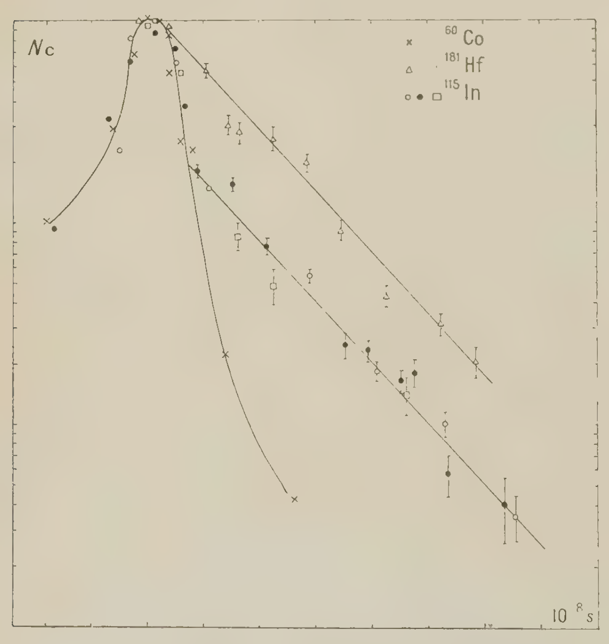


FIG. 1. — Courbe de coïncidences retardées pour le ^{60}Co, le ^{181}Hg et le ^{116}In.

remonte au sommet de la courbe des coïncidences promptes du ^{60}Co, ce qui montre qu'il n'y a qu'une seule cascade retardée qui est en jeu. Par contre pour la cascade (0,410 γ) (2,150 γ) du ^{116}Sn, on trouve une droite correspondante à un demi-temps de vie $T_{1/2} = (1{,}0 \pm 0{,}1)\ 10^{-8}$ sec, mais qui ne remonte pas au sommet de la courbe des coïncidences promptes. Les différents points expérimentaux de la figure correspondent à des mesures entièrement distinctes. Il y a deux cascades en jeu : une cascade prompte et une cascade retardée. Le rapport gamma retardé/gamma prompt est de 1,7.

Cette mesure met en évidence qu'il faut considérer au lieu de la simple cascade (*a*) de la figure 2, l'un ou

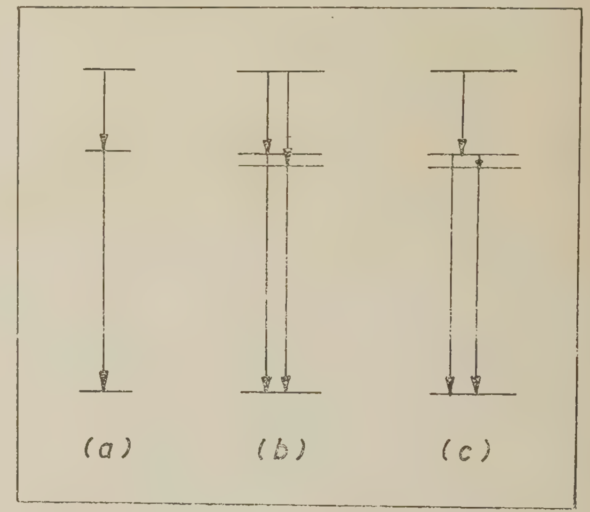


FIG. 2. — Schémas pour les cascades mises en évidence.

l'autre des schémas (*b*) et (*c*) de la figure 2, avec un dédoublement du gamma de 2,15 MeV. Il n'est pas encore possible, cependant, de conclure que le second niveau est celui de 2,21 MeV du ^{116}Sn provenant du ^{116}Sb. D'autres mesures seront entreprises.

Nous remercions le Dr Jones et M. Goedertier, pour les suggestions et discussions et pour la permission d'attirer déjà l'attention sur un de leurs résultats. Nous remercions aussi M. le Professeur de Hemptinne, Directeur du Centre, qui nous a beaucoup encouragés dans ce travail.

Lettre reçue le 1er juin 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GOEDERTIER (R.), *Thèse* de Licence, Louvain, 1958.
[2] JONES (A.), *Thèse* de Doctorat, Louvain, 1959.
[3] SCHARENBERG (R. P.), STEWARD et WIEDENBECK, *Phys. Rev.*, 1956, **101**, 689.

SUR L'EFFET D'UN MOMENT DIPOLAIRE ÉLECTRIQUE DU NOYAU SUR LES NIVEAUX D'ÉNERGIE D'UN ATOME DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE UNIFORME

Par J. P. BARRAT,

Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure, Paris.

Un grand intérêt s'attache actuellement à la détermination d'une limite supérieure pour le moment dipolaire électrique des particules élémentaires. On a pu fixer une limite très petite dans le cas du neutron ($< e \times 5.10^{-20}$ cm) [1], mais les déterminations dans le cas du proton et de l'électron sont beaucoup moins précises ($\sim e \times 10^{-13}$ cm) [2]. La grande finesse des raies de résonance magnétique observées dans les états fondamentaux de certains atomes (métaux alcalins, isotope ^{199}Hg) [3] suggère de tenter d'établir une telle limite avec une grande précision en étudiant l'effet Stark de ces niveaux. On s'attendrait en effet à ce que l'interaction d'un moment dipolaire électrique nucléaire $\boldsymbol{d} = \mathrm{d}\boldsymbol{I}$ ($\boldsymbol{I}$ = spin nucléaire) avec un champ électrique uniforme $\boldsymbol{E}$ donne lieu à un effet Stark linéaire (interaction $-\boldsymbol{d}.\boldsymbol{E}$) que l'on essaierait de mettre en évidence en le séparant de l'effet Stark quadratique normal (d'ailleurs très faibles pour ces niveaux). Salpeter [2] a fait remarquer que l'effet Stark linéaire de l'atome d'hydrogène reste en réalité nul, même si l'électron porte un moment dipolaire électrique, tout au moins dans une approximation non relativiste. Le but de cette note est de généraliser ce résultat au cas d'un atome quelconque, dans le cas où le noyau serait porteur d'un moment dipolaire électrique $\mathrm{d}\boldsymbol{I}$, et de l'interpréter physiquement.

Soient $\boldsymbol{r}_1, \ldots \boldsymbol{r}_Z$ les coordonnées des Z électrons de l'atome. Le champ créé par l'électron i au niveau du noyau est

$$-\frac{1}{Z}\nabla_i\left(\frac{Ze}{r_i}\right) = -\frac{1}{Z}\nabla_i\, V(r_i)$$

où $V(r_i) = \dfrac{Ze}{r_i}$ est le potentiel coulombien dû au noyau.

L'hamiltonien en l'absence de champ extérieur est, dans une approximation non relativiste qui néglige le couplage spin-orbite.

$$H_0 = \sum_{i=1}^{Z}\left[\frac{p_i^2}{2m} - eV(r_i)\right] + \sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{Z} V(r_{ij}) + \frac{d}{Z}\sum_{i=1}^{Z} \boldsymbol{I}.\nabla_i\, V(r_i) \quad (1)$$

où

$$V(r_{ij}) = \frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}, \qquad \boldsymbol{p}_i = -i\hbar\,\nabla_i. \quad (2)$$

L'interaction avec un champ électrique uniforme $\boldsymbol{E}$ dérivant du potentiel $\Phi(\boldsymbol{r})$ correspond à l'hamiltonien perturbateur

$$H_1 = -\sum_{i=1}^{Z} e\,\Phi(r_i) - \mathrm{d}\boldsymbol{I}.\boldsymbol{E} = -\sum_{i=1}^{Z} e\,\Phi(\boldsymbol{r}_i) + \frac{d}{Z}\sum_{i=1}^{Z} \boldsymbol{I}.\nabla_i\,\Phi(\boldsymbol{r}_i) \quad (3)$$

puisque $\nabla_i\,\Phi(\boldsymbol{r}_i) = -\boldsymbol{E}$ est indépendant de i.

L'hamiltonien total s'écrit :

$$H_0 + H_1 = H_e + H_d \quad (4)$$

où

$$\begin{cases} H_e = \displaystyle\sum_{i=1}^{Z}\left\{\frac{p_i^2}{2m} - eV(r_i) - e\,\Phi(\boldsymbol{r}_i)\right\} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{Z} V(r_{ij}) & (5)\\ H_d = \displaystyle\frac{d}{Z}\sum_{i=1}^{Z} \boldsymbol{I}.(\nabla_i\, V(r_i) + \nabla_i\,\Phi(r_i)) & (6)\end{cases}$$

H_e est l'hamiltonien de l'ensemble des électrons, H_d celui du moment dipolaire nucléaire.

Le calcul se poursuit alors comme dans le cas examiné par Salpeter [2]. On suppose que H_e a été diagonalisé et on traite H_d comme une perturbation ; seuls les termes du 1er ordre sont linéaires en d et E. On remarque que :

$$H_d = \frac{id}{Z\hbar}\sum_{i=1}^{Z} [\boldsymbol{I}.\boldsymbol{p}_i,\, V(r_i) + \Phi(\boldsymbol{r}_i)] = \frac{id}{Z\hbar}\sum_{i,j=1}^{Z} [\boldsymbol{I}.\boldsymbol{p}_i,\, V(r_j) + \Phi(\boldsymbol{r}_j)] \quad (7)$$

puisque $\boldsymbol{p}_i$ commute avec $V(r_j) + \Phi(\boldsymbol{r}_j)$ pour $j \neq i$.

D'après (5), (7) s'écrit :

$$H_d = \frac{id}{Ze\hbar}\sum_{i=1}^{Z}\left[\boldsymbol{I}.\boldsymbol{p}_i,\, -H_e + \sum_{j=1}^{Z}\frac{\boldsymbol{p}_j^2}{2m} + \sum_{\substack{j,k=1\\ j>k}}^{Z} V(r_{jk})\right]. \quad (8)$$

Or $\boldsymbol{p}_i$ commute avec $\boldsymbol{p}_j$, et avec $V(r_{jk})$ sauf pour $i = j$ ou $i = k$. Donc

$$H_d = \frac{-id}{Ze\hbar}\sum_{i=1}^{Z} [\boldsymbol{I}.\boldsymbol{p}_i,\, H_e] + \frac{id}{Ze\hbar}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{Z} [\boldsymbol{I}.\boldsymbol{p}_i,\, V(r_{ij})]$$

$$= \frac{-id}{Ze\hbar}\sum_{i=1}^{Z} [\boldsymbol{I}.\boldsymbol{p}_i,\, H_e] + \frac{d}{Ze}\sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{Z} \boldsymbol{I}.\left\{\nabla_i\, V(r_{ij}) + \nabla_j\, V(r_{ij})\right\} \quad (9)$$

Le facteur $\boldsymbol{I}$ dans le dernier terme est nul (*). Quant au 1er terme, ses éléments de matrice sont nuls entre états propres de H_e ayant la même valeur propre (c'est-à-dire ses éléments diagonaux ou entre états

(*) $\sum_i \boldsymbol{p}_i$ commute *a priori* avec $\sum_j \dfrac{p_j^2}{2m} + \sum_{\substack{j,k\\ j>k}} V(r_{jk})$ parce que $\sum_i \boldsymbol{p}_i$ est lié à l'opérateur représentant une translation infinitésimale de l'ensemble des électrons et que

$$\sum_j \frac{p_j^2}{2m} + \sum_{\substack{j,k\\ j>k}} V(r_{jk})$$

est invariant par translation.

dégénérés). Donc H_d ne perturbe pas au 1er ordre les niveaux d'énergie de H_e. Le calcul est analogue et la conclusion reste la même si ce sont les électrons qui portent des moments dipolaires électriques.

L'origine physique du résultat est l'interaction avec **E** du moment dipolaire électrique induit dans l'atmosphère électronique par le moment permanent du noyau. En effet soient H_{eo} et H_{do} les hamiltoniens H_e et H_d en l'absence de champ extérieur, H_{e1} et H_{d_1} les termes de H_e et de H_d dépendant du champ extérieur. On peut retrouver le résultat précédent en diagonalisant d'abord $H_{eo} + H_{do}$ et en calculant l'effet sur ses états propres (déterminés au 1er ordre en d) de la perturbation $H_{e_1} + H_{d_1}$. Soient u_n les états propres de H_{eo}, d'énergie E_n (les états de même n et de α différents sont dégénérés et on suppose qu'ils ont la même parité) et $v_{n\alpha} = u_{n\alpha} + w_{n\alpha}$ les états propres de $H_{eo} + H_{do}$ au 1er ordre en d. H_{do} étant impair n'a pas d'éléments diagonaux et :

$$w_{n\alpha} = \sum_{\substack{m\beta \\ m\neq n}} \frac{< u_{m\beta}\,|H_{d0}|\,u_{n\alpha} > u_{m\beta}}{E_n - E_m}. \quad (10)$$

Dans (10), les seuls termes non nuls correspondent à des états $u_{m\beta}$ de parité opposée à celle de l'état $u_{n\alpha}$. On montre comme ci-dessus (équations (7) à (9)) que :

$$H_{eo} = -\frac{id}{Ze\hbar}\sum_{i=1}^{Z} [\boldsymbol{I}.\boldsymbol{p}_i,\, H_{e0}]$$

D'où :

$$w_{n\alpha} = -\frac{id}{Ze\hbar}\left(\sum_{i=1}^{Z} \boldsymbol{I}.\boldsymbol{p}_i\right) u_{n\alpha}$$

$$v_{n\alpha} = \left(1 - \frac{id}{Ze\hbar}\sum_{i=1}^{Z} \boldsymbol{I}.\boldsymbol{p}_i\right) u_{n\alpha} \quad (11)$$

$v_{n\alpha}$ n'a pas une parité bien déterminée, puisque $w_{n\alpha}$ et $u_{n\alpha}$ sont des parités opposées. Un moment dipolaire est donc induit dans l'atmosphère électronique ($v_{n\alpha}$ se déduit de $u_{n\alpha}$ par une translation). En présence du champ $\boldsymbol{E}$, le déplacement d'énergie linéaire en E s'obtient en diagonalisant $H_{e_1} + H_{d_1}$ pour les états $v_{n\alpha}$ qui peuvent rester dégénérés. Au 1er ordre en d :

$$< v_{n\alpha}\,|H_{d1} + H_{e1}|\,v_{n\alpha'} > = < u_{n\alpha}\,|H_{d1}|\,u_{n\alpha'} > + \frac{id}{Ze\hbar} < u_{n\alpha}\left|\left[\sum_{i=1}^{Z} \boldsymbol{I}.\boldsymbol{p}_i,\, H_{e_1}\right]\right| u_{n\alpha'} >$$
$$= < u_{n\alpha}\,|H_{d_1}|\,u_{n\alpha'} > - \frac{d}{Z}\sum_{i=1}^{Z} < u_{n\alpha}\,|\boldsymbol{I}.\nabla_i\, \Phi(\boldsymbol{r}_i)|\,u_{n\alpha'} >. \quad (12)$$

Les deux termes de (12) sont égaux et opposés. Le 1er correspond à l'effet Stark linéaire du moment dipolaire d$\boldsymbol{I}$, le 2e à l'effet Stark linéaire du moment induit dans l'atmosphère électronique, qui est donc égal et opposé au précédent. L'effet linéaire reste donc nul. Cette conclusion n'est valable que dans une approximation non relativiste où l'on néglige le couplage spin-orbite. Des études sont en cours pour évaluer l'ordre de grandeur des effets linéaires qui pourraient subsister si l'on en tient compte.

Lettre reçue le 4 juin 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Smith (J. H.), Purcell (E. M.) et Ramsey (N. F.), *Phys. Rev.*, 1957, **108**, 120.

[2] Feinberg (G.), *Phys. Rev.*, 1958, **112**, 1637. Salpeter (E. E.), *Phys. Rev.*, 1958, **112**, 1642. Sternheimer (R. M.), *Phys. Rev.*, 1959, **113**, 828.

[3] Arditi (M.) et Carver (T. R.), *Phys. Rev.*, 1958, **109**, 1012 ; 1958, **112**, 449. Beaty (E. C.), Bender (P. L. et Chi (A. R.), *Phys. Rev.*, 1958, **112**, 450 ; *Phys. Rev., Lett.* 1958, **1**, 311. Cagnac (B.), Communication privée.

SUR UNE SOLUTION EXCEPTIONNELLE D'UN OSCILLATEUR A RELAXATION DU GENRE TRIODE

Par L. Sideriades,
C. N. R. S., C. R. S. I. M. de Marseille.

En électronique, la triode montée en oscillatrice constitue un exemple typique d'un oscillateur à relaxation. L'étude de la stabilité des oscillations montre le rôle prépondérant de la caractéristique non linéaire $i_p(v_g)$ [1]. Si on définit le plan de phases par $x = v$ (différence de potentiel aux bornes du circuit bouchon dans la plaque) et $y = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, on peut faire correspondre certaines zones de ce plan à certains arcs de la caractéristique. A $\mathrm{d}i_p = 0$ il correspond dans le plan de phases une zone passive délimitée par deux droites parallèles à $y'y$; et la zone active résiduelle correspond à $\mathrm{d}i_p \neq 0$. En langage topologique, le point singulier des courbes intégrales — qu'on prend pour origine — est un foyer répulsif pour la zone active, attractif pour la zone passive, dans le cas des oscillations stables. D'après la théorie de H. Poincaré [2], il existe un « cycle limite » stable qui est la seule courbe fermée du plan des phases et qui correspond aux oscillations effectivement observables (cf. *fig.* 1).

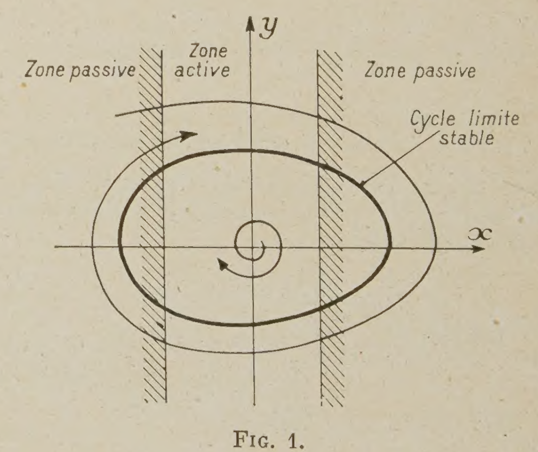


Fig. 1.

Proposons-nous alors de rechercher dans quelles conditions il serait possible de mettre en évidence l'existence d'un deuxième cycle limite associé au cycle stable. D'après un théorème de H. Poincaré sur les cycles limites, ce deuxième cycle doit être instable.

Considérons le schéma de la figure 2, comportant en plus des schémas classiques, une résistance R' dans le

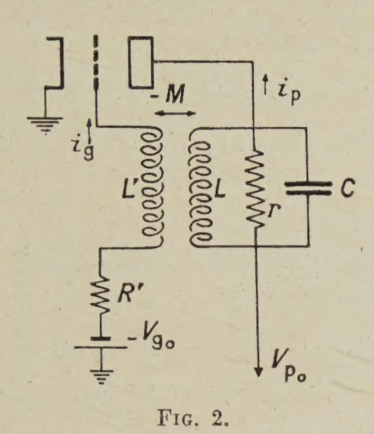


Fig. 2.

circuit de grille. On fait sur $i_p(v_g)$ l'approximation suivante :

$$i_p = a\frac{(u - w_0 + u_0)^2}{2\rho\, u_0} + \frac{v_p - V_{p0}}{\rho}$$

a, coefficient d'amplification de la triode.

ρ, valeur minima de la résistance interne.

u_0, différence de potentiel entre les potentiels de grille correspondant au cut-off et à la saturation.

$-w_0$, valeur du potentiel de cut-off relativement à la masse.

$u = v_g + w_0$.

V_{p0}, haute tension appliquée sur la plaque.

Et on tient compte du courant de grille suivant la relation :

$$i_g = p'v_g + i_0$$

$\rho' = 1/p'$, valeur de la résistance interne grille-cathode.

Cette relation n'est valable que si i_g est positif ; elle est autrement nulle.

Dans ces conditions, tous calculs effectués, on aboutit au système dynamique suivant :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = d$$

avec

$$\begin{cases} X = y \\ Y = -\dfrac{1}{C}\left[\dfrac{x}{L} + \dfrac{y}{r'} - \dfrac{az}{\rho\, u_0} Z\right] \\ Z = \dfrac{1}{p'L'}\left(\dfrac{M}{L}x + \alpha z + \beta\right) \end{cases}$$

en ayant pris soin de poser :

$$\begin{cases} \alpha = 1 - p'R' \qquad r' = \dfrac{r\rho}{r+\rho} \\ \beta = V_{g0} - w_0\,\alpha - R'_{i_0} \end{cases}$$ V_{g0}, polarisation fixe de grille.

Le problème semble tributaire d'un espace à trois dimensions. Mais en fait, une projection sur le plan

$$\frac{M}{L}x + \alpha z + \beta = 0.$$

permet de retrouver la discussion plane de la stabilité. On peut ainsi mettre en évidence l'existence d'un deuxième cycle instable dans le cas où la résistance R' est grande (supérieure à la résistance interne grille-cathode), et où la polarisation fixe de grille V_{g0} est voisine de la masse. Il se superpose alors à l'ancienne zone active, une zone passive plus étroite, comme l'indique la figure 3. Et les valeurs des paramètres α

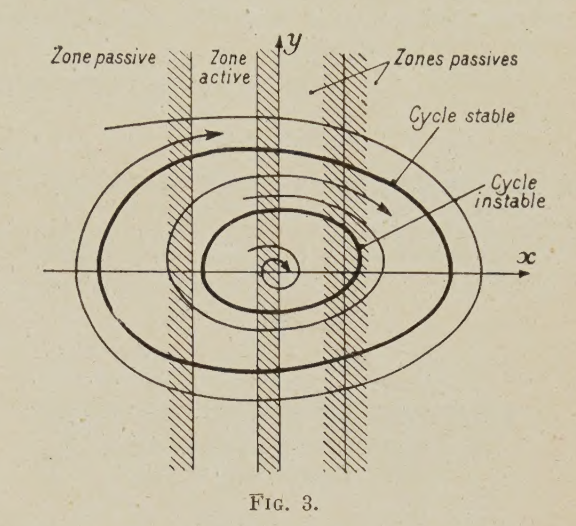


Fig. 3.

et β sont telles (1) que le point singulier est attractif ; on peut vérifier par exemple que les conditions de stabilité de Routh-Hurwitz sont observées. On arrive ainsi à la conclusion suivante :

— l'origine est un point singulier attractif dans une certaine zone qui l'entoure ; toute condition initiale sous forme d'une tension de faible amplitude conduit au blocage des oscillations ;

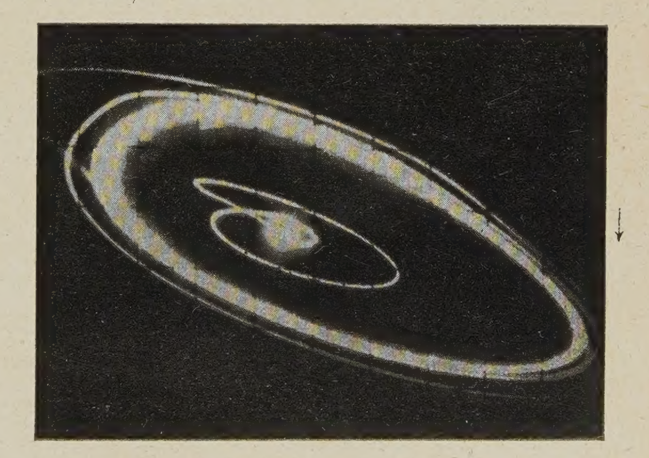


Fig. 4.

— mais il existe une zone active donnant lieu à l'existence d'un cycle limite stable ; on peut mettre en évidence l'existence de ce cycle sous la forme d'oscil-

(1) $\alpha = -p'R'$ et $\beta = V_{g0} - R'p'(w_0 - \rho' i_0)$.

lations stables obtenues à partir de conditions initiales correspondant à une tension de grande amplitude ;

— entre le point singulier et le cycle stable, il existe un cycle instable séparant les oscillations stables des oscillations amorties.

En prenant une lampe dont la zone de « freinage » (passive), due à l'existence du courant de grille, est relativement faible, on peut mettre ce résultat en évidence sur l'écran d'un oscillographe cathodique représentant le plan de phases (*fig.* 4).

Lettre reçue le 14 juin 1959.

RÉFÉRENCES

[1] Sideriades (L.), « Sur la stabilité des oscillations d'une triode ». *L'Onde électrique*, janvier 1954, 48-54.

[2] Poincaré (H.), « Sur les courbes définies par une équation différentielle ». *Œuvres*, Gauthier-Villars, Paris, 1892, vol. I.

RÉSULTATS DE MESURES DE TEMPS DE RELAXATION TRANSVERSE T_2 PAR ÉCHOS DE SPINS

Par Ionel Solomon,

C. E. N. de Saclay, Gif-sur-Yvette (Seine-et-Oise).

Nous avons mesuré le temps de relaxation transverse T_2 de l'eau à 28 MHz, à une température de 24 °C par la méthode des Échos de Spins [1, 2], perfectionnée par Meiboom et Gill [3].

Pour éprouver les possibilités de l'appareillage dans la mesure des temps de relaxation longs, nous avons mesuré les temps de relaxation d'un échantillon de benzène désoxygéné.

$$T_1 = 19{,}6 \pm 0{,}5 \text{ sec.}$$
$$T_2 = 18{,}5 \pm 1{,}5 \text{ sec.}$$

Ces résultats montrent que les inhomogénéités du champ magnétique, ainsi que la diffusion sont complètement compensées. Les défauts auxquels la méthode reste sensible sont les fluctuations rapides du champ qui, dans notre cas, obligent à faire des séquences d'échos très rapprochées (300 à 2 000 échos par seconde).

Les résultats des mesures pour un échantillon d'eau contenu dans un tube de plexiglass sont :

Eau non dégazée :

$$T_1 = 2{,}6 \pm 0{,}1 \text{ sec.}$$
$$T_2 = 2{,}2 \pm 0{,}1 \text{ sec.}$$

Eau désoxygénée :

$$T_1 = 3{,}3 \pm 0{,}1 \text{ sec.}$$
$$T_2 = 2{,}65 \pm 0{,}1 \text{ sec.}$$

Ces valeurs ont été trouvées indépendantes du pH. Ces résultats ne concordent pas avec les mesures de Meiboom et coll. [4].

L'explication proposée est l'influence des parois de verre dans un échantillon de petite taille. En effet, si l'on introduit dans le tube de plexiglass des billes de verre de 2 mm de diamètre, la valeur de T_2 de l'eau non dégazée passe de 2,2 sec à 1,9 sec, alors que T_1 ne varie pas, aux erreurs d'expérience près. De plus cette diminution de T_2 dépend du pH de l'eau employée, de la nature du verre et du temps pendant lequel l'eau reste en contact avec la surface du verre, et l'influence de ces différents paramètres rend les mesures peu reproductibles. Nous n'avons fait aucune tentative d'étude systématique de cette interaction surface de verre-eau qui doit être un phénomène très complexe.

Lettre reçue le 9 juin 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hahn (E. L.), *Phys. Rev.*, 1950, **80**, 580.

[2] Carr (H. Y.) et Purcell (E. M.), *Phys. Rev.*, 1954, **94**, 630.

[3] Meiboom (S.) et Gill (D.), *Rev. Sc. Instr.*, 1958, **29**, 688.

[4] Meiboom (S.), Luz (Z.) et Gill (D.), *J. Chem. Phys.*, 1957, **27**, 1411.